- **BÁZE**: ①
  - NECHŤ V JE VEKTOROVÝ PROSTOR NAD $\mathbb{T}$. PAK BÁZÍ V JE JAKÝKOLIV LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝ SYSTÉM GENERÁTORŮ V

- **VĚTA 9.1** (O EXISTENCI BÁZE):
  KAŽDÝ VEKTOROVÝ PROSTOR MÁ BÁZI
  - DŮKAZ:
    - DOKÁŽEME POUZE PRO KONEČNĚ GENEROVANÝ PROSTOR
      - JINAK POTŘEBUJEME ZORNOVO LEMMA
    - BUĎ $v_1, \dots, v_n$ SYSTÉM GENERÁTORŮ V,
    - JSOU-LI $v_1, \dots, v_n$ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ, TAK TVOŘÍ BÁZI
    - JINAK PODLE DŮSLEDKU 7.6 EXISTUJE k TAKOVÉ, ŽE
      $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$
    - JE-LI SYSTÉM $v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝ, TAK MÁME BÁZI. JINAK POSTUP OPAKUJEME $\boxtimes$

- **PŘÍKLAD POUŽITÍ BÁZÍ (SOUŘADNICE)**:
  - **VĚTA 9.2**:
    JE-LI $v_1, \dots, v_n$ BÁZE PROSTORU V, PAK PRO KAŽDÉ $u \in V$ EXISTUJÍ JEDNOZNAČNĚ URČENÉ KOEFICIENTY $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T}$ TAKOVÉ, ŽE $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.
  - DŮKAZ:
    i) EXISTENCE:
      - $v_1, \dots, v_n$ JE BÁZE $\Rightarrow$ $\forall u \in V$ LZE ZAPSAT JAKO $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ PRO NĚJAKÁ $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T}$
        ($v_1, \dots, v_n$ JSOU GENERÁTORY V)
    ii) JEDNOZNAČNOST:
      - NECHŤ $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ A $u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$
      - PAK $o = u - u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i$ (DISTRIBUTIVITA)
      - $v_1, \dots, v_n$ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ $\Rightarrow$ $\alpha_i - \beta_i = 0$ PRO $\forall i = 1, \dots, n$ $\Rightarrow$ $\alpha_i = \beta_i$ PRO KAŽDÉ $i = 1, \dots, n$
  $\boxtimes$

- NECHŤ $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ JE BÁZÍ V A NECHŤ PRO $u \in V$ PLATÍ $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. POTOM **SOUŘADNICE** VEKTORU u VŮČI BÁZI B JSOU KOEFICIENTY $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. VEKTOR SOUŘADNIC ZNAČÍME

$$[u]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$$

  - JEDNOZNAČNOST MEZI VEKTORY A SOUŘADNICEMI UMOŽŇUJE POČÍTAT S TĚŽKO UCHOPITELNÝMI VEKTORY JAKO S VEKTORY ARITMETICKÉHO PROSTORU T^n

- PRO LIBOVOLNOU BÁZI B KONEČNĚ GENEROVANÉHO PROSTORU V PLATÍ:

$[u+v]_B = [u]_B + [v]_B$ PRO KAŽDÉ $u, v \in V$, $\alpha \in T$

$[\alpha v]_B = \alpha [v]_B$ - DŮKAZ NA ROZMYŠLENÍ

- **LEMMA 9.3 (LEMMA O VÝMĚNĚ)**: BUĎ $y_1, \dots, y_n$ SYSTÉM GENERÁTORŮ PROSTORU V A NECHŤ $x \in V$ MÁ VYJÁDŘENÍ $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$. PAK PRO LIBOVOLNÉ k TAKOVÉ, ŽE $\alpha_k \neq 0$ JE $y_1, \dots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, \dots, y_n$ SYSTÉMEM GENERÁTORŮ V.

- DŮKAZ:
  - ZE VZTAHU $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ VYJÁDŘÍME $y_k = \frac{1}{\alpha_k}\left(x - \sum_{i \neq k} \alpha_i y_i\right)$
  - UKÁŽEME, ŽE VEKTORY $y_1, \dots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, \dots, y_n$ GENERUJÍ V
  - UVAŽME $z \in V$, POTOM $\exists \beta_1, \dots, \beta_n$ TAKOVÉ, ŽE $z = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i$

    ↳ $y_1, \dots, y_n$ JE SYSTÉM GENERÁTORŮ
  - TO LZE PŘEPSAT NA:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i = \beta_k y_k + \sum_{i \neq k} \beta_i y_i = \frac{\beta_k}{\alpha_k}\left(x - \sum_{i \neq k} \alpha_i y_i\right) + \sum_{i \neq k} \beta_i y_i$$

$$= \frac{\beta_k}{\alpha_k} x + \sum_{i \neq k} \left(\beta_i - \frac{\beta_k}{\alpha_k} \alpha_i\right) y_i$$

  - PROTOŽE JSME VYJÁDŘILI LIBOVOLNÉ $z \in V$ JAKO LINEÁRNÍ KOMBINACI $y_1, \dots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, \dots, y_n$, TAK MÁME SYSTÉM GENERÁTORŮ ☒

- PŘÍKLAD VÝMĚNY JE V PREZENTACI

- **VĚTA 9.4** (STEINITZOVA VĚTA O VÝMĚNĚ):

NECHŤ $x_1,\dots,x_m$ JE LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝ SYSTÉM V PROSTORU V A NECHŤ $y_1,\dots,y_n$ JE SYSTÉM GENERÁTORŮ VE V. POTOM PLATÍ

1) $m \le n$,
2) EXISTUJÍ NAVZÁJEM RŮZNÉ INDEXY $k_1,\dots,k_{n-m}$ TAKOVÉ, ŽE $x_1,\dots,x_m,y_{k_1},\dots,y_{k_{n-m}}$ TVOŘÍ SYSTÉM GENERÁTORŮ

- DŮKAZ:
  - POSTUPUJEME INDUKCÍ PODLE m. PRO $m=0$ PLATÍ TRIVIÁLNĚ.
  - INDUKČNÍ KROK: NECHŤ TVRZENÍ PLATÍ PRO $m-1$. CHCEME JEJ PRO m.
  - VEKTORY $x_1,\dots,x_{m-1}$ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ ⇒ PODLE IP EXISTUJÍ RŮZNÉ INDEXY $l_1,\dots,l_{n-m+1}$ TAKOVÉ, ŽE $x_1,\dots,x_{m-1}$, $y_{l_1},\dots,y_{l_{n-m+1}}$ GENERUJÍ V

1) KDYBY $m-1=n$, PAK $x_1,\dots,x_{m-1}$ GENERUJÍ V, TEDY $x_m \in \mathrm{span}\{x_1,\dots,x_{m-1}\}$, COŽ NELZE Z LINEÁRNÍ NEZÁVISLOSTI $x_1,\dots,x_m$

$\Rightarrow \underline{m \le n}$

2) $x_1,\dots,x_{m-1},y_{l_1},\dots,y_{l_{n-m+1}}$ GENERUJÍ V ⇒ x_m LZE ZAPSAT JAKO

$$x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n-m+1} \beta_i y_{l_i}$$

- $\beta_1 = \dots = \beta_{n-m+1} = 0$ NELZE Z LINEÁRNÍ NEZÁVISLOSTI $x_1,\dots,x_m$ ⇒ $\exists k: \beta_k \neq 0$
- PODLE LEMMA O VÝMĚNĚ (VĚTA 9.3) LZE VYMĚNIT y_{l_k} ZA x_m A $x_1,\dots,x_m,y_{l_1},\dots,y_{l_{k-1}},y_{l_{k+1}},\dots,y_{l_{n-m+1}}$ GENERUJÍ V

☒

- **DŮSLEDEK 9.5**:

VŠECHNY BÁZE KONEČNĚ GENEROVANÉHO VEKTOROVÉHO PROSTORU JSOU STEJNĚ VELKÉ

- DŮKAZ: $x_1,\dots,x_m$, $y_1,\dots,y_n$ - 2 BÁZE PROSTORU V

$x_1,\dots,x_m$ JSOU LIN. NEZ., $y_1,\dots,y_n$ JSOU GENERÁTORY $\Rightarrow \underline{m \le n}$

VĚTA 9.4

$x_1,\dots,x_m$ JSOU GENERÁTORY, $y_1,\dots,y_n$ JSOU LIN. NEZ. $\Rightarrow \underline{n \le m}$

☒

- **DIMENZE**:
  - PROTOŽE KAŽDÝ KONEČNĚ GENEROVANÝ V MÁ BÁZI A BÁZE JSOU STEJNĚ VELKÉ, TAK LZE DEFINOVAT DIMENZI NÁSLEDOVNĚ
- **DIMENZE** KONEČNĚ GENEROVANÉHO V JE VELIKOST NĚJAKÉ JEHO BÁZE
  - NENÍ-LI V KONEČNĚ GENEROVANÝ, JE JEHO DIMENZÍ ∞
  - ZNAČÍME $\dim(V)$
- DÁL BUDEME UVAŽOVAT JEN KONEČNĚ GENEROVANÉ VEKTOROVÉ PROSTORY
- **TVRZENÍ 9.6** (VZTAH POČTU PRVKŮ SYSTÉMU K DIMENZI):
  PRO VEKTOROVÝ PROSTOR V PLATÍ:
  1) JSOU-LI $x_1,\dots,x_m$ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ, PAK $m \leq \dim(V)$. POKUD $m=\dim(V)$, PAK $x_1,\dots,x_m$ JE BÁZÍ V.
  2) JSOU-LI $y_1,\dots,y_m$ GENERÁTORY V, PAK $m \geq \dim(V)$. POKUD $m=\dim(V)$, PAK $y_1,\dots,y_m$ JE BÁZÍ V.
  - DŮKAZ:
    - PRO $d = \dim(V)$ BUĎ $z_1,\dots,z_d$ BÁZÍ V
    1) $x_1,\dots,x_m$ JSOU LIN. NEZ., $z_1,\dots,z_d$ JSOU GENERÁTORY $\overset{\text{VĚTA 9.5}}{\Rightarrow} m \leq d$
       A PŘI $m=d$ JSOU $x_1,\dots,x_m$ GENERÁTORY A TEDY BÁZÍ V
    2) $y_1,\dots,y_m$ JSOU GENERÁTORY, $z_1,\dots,z_d$ JSOU LIN. NEZ. $\overset{\text{VĚTA 9.4}}{\Rightarrow} d \leq m$
       JSOU-LI $y_1,\dots,y_m$ LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ, PAK LZE JEDEN VYNECHAT A ZÍSKAT SYSTÉM GENERÁTORŮ VELIKOSTI $m-1$. VĚTA 9.5 PAK DÁVÁ $d \leq m-1$. TEDY POKUD $d=m$, PAK $y_1,\dots,y_m$ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ A TVOŘÍ BÁZI ☒
- TEDY BÁZE JE MAXIMÁLNÍ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝ SYSTÉM A ZÁROVEŇ MINIMÁLNÍ SYSTÉM GENERÁTORŮ
- **VĚTA 9.7**:
  KAŽDÝ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝ SYSTÉM VEKTOROVÉHO PROSTORU V LZE ROZŠÍŘIT NA BÁZI V.
  - DŮKAZ: $x_1,\dots,x_m \in V$ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ, $z_1,\dots,z_d$ BÁZE V
    - → VĚTA 9.4 $\Rightarrow \exists$ RŮZNÉ $k_1,\dots,k_{d-m}$: $x_1,\dots,x_m, z_{k_1},\dots,z_{k_{d-m}}$ GENERUJÍ V
    - TEDY MÁME $d=\dim(V)$ GENERÁTORŮ PROSTORU V, PODLE TVRZENÍ 9.6 TVOŘÍ BÁZI ☒

- VĚTA 9.8 (DIMENZE PODPROSTORU):
  - JE-LI W PODPROSTOREM V, PAK $\dim(W) \leq \dim(V)$. JE-LI $\dim(W) = \dim(V)$, PAK $W = V$.
  - DŮKAZ:
    - DEFINUJME $M = \emptyset$. POKUD $\mathrm{SPAN}(M) = W$, PAK JSME HOTOVI.
    - JINAK $\exists\, v \in W \setminus \mathrm{SPAN}(M)$. PAK PŘIDÁME v DO M A PROCES OPAKUJEME
    - PROTOŽE M JE LINEÁRNĚ NEZÁVISLÁ, TAK TVRZENÍ 9,6 DÁVÁ $|M| \leq \dim(V)$
    - PO KONEČNĚ MNOHA KROCÍCH DOSTÁVÁME $W = \mathrm{SPAN}(M)$ A M BUDE BÁZÍ W, PŘIČEMŽ $\dim(W) = |M| \leq \dim(V)$
    - POKUD $\dim(V) = \dim(W)$, PAK PODLE TVRZENÍ 7,6 JE M BÁZÍ V

☒