- **TRANSPOZICE** – transponovaná matice k matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má typ $n\times m$, značí se A^T a splňuje $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ pro každé $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$
  - překlopení dle hlavní diagonály

– příklad:

$$A = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$$

– lze tak psát vektor $x\in\mathbb{R}^n$ do řádku jako $x = (x_1,\dots,x_n)^T$

– **TVRZENÍ 3.1** (vlastnosti transpozice):
pro $\alpha\in\mathbb{R}$ a matice A, B vhodných rozměrů platí:

1) $(A^T)^T = A$,
2) $(A+B)^T = A^T + B^T$,
3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,
4) $(AB)^T = B^T A^T$.

– DŮKAZ:
– ukážeme jen 1), zbytek ponecháme jako cvičení

1) $A\in\mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow A^T$ má typ $n\times m$ $\Rightarrow (A^T)^T$ má typ $m\times n$

$((A^T)^T)_{ij} = (A^T)_{ji} = A_{ij} \Rightarrow \underline{(A^T)^T = A}$ ⊠

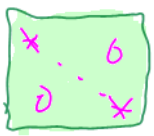
– ze 4) plyne $(A_1\cdots A_k)^T = A_k^T\cdots A_1^T$

– SPECIÁLNÍ TYPY MATIC:

– matice $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je **symetrická**, pokud $A^T=A$
  – A je invariantní vůči transpozici
  – pro každé $B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ je B^TB symetrická

čtvercová!

– matice $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je **diagonální**, pokud $a_{ij}=0$ pro $i\neq j$
  – tedy mimo diagonálu jsou nuly



– $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ je **horní trojúhelníková**, pokud $a_{ij}=0$ pro $i>j$
  – pod diagonálou jsou nuly
  – matice v REF je horní trojúhelníková, ale obráceně to platit nemusí

– **dolní trojúhelníková** matice má nuly nad diagonálou

- MĚJME VEKTORY $x, y \in \mathbb{R}^m$ ②
- (STANDARDNÍ) SKALÁRNÍ SOUČIN MÁ TVAR $x^T y = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$
  - EUKLEIDOVSKOU NORMU LZE PAK ZAVÉST JAKO
    $\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$
- VNĚJŠÍ SOUČIN MÁ TVAR $xy^T = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_m \\ & \ddots & \\ x_m y_1 & \cdots & x_m y_m \end{pmatrix}$

- ZMÍNÍME JEŠTĚ DALŠÍ VLASTNOSTI NÁSOBENÍ
- TVRZENÍ 3.2: PRO $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ PLATÍ:
  1) $Ae_j = A_{*j}$
  2) $e_i^T A = A_{i*}$
  3) $(AB)_{*j} = AB_{*j}$
  4) $(AB)_{i*} = A_{i*}B$
  5) $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j}$
  6) $y^T A = \sum_{i=1}^{m} y_i A_{i*}$

DŮKAZ:

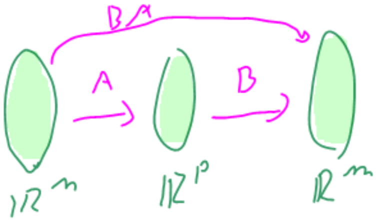
- UKÁŽEME JEN VYBRANÉ VLASTNOSTI, ZBYTEK JE NA ROZMYŠLENÍ

1) $(Ae_j)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(e_j)_k = \left(\sum_{k \neq j} a_{ik} \cdot 0\right) + a_{ij} = a_{ij}$

3) $(AB)_{*j} \underset{\text{VLASTNOST 1)}}{=} (AB)e_j \underset{\text{ASOCIATIVITA SOUČINU}}{=} A(Be_j) \underset{\text{VLASTNOST 1)}}{=} AB_{*j}$

5) $\underbrace{(Ax)_i}_{\text{LEVÁ STRANA}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot (A_{*j})_i = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j}\right)_i}_{\text{PRAVÁ STRANA}}$ ⊠

- SOUSTAVY ROVNIC MŮŽEME ZAPSAT JAKO $Ax = b$ PRO $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ (3)
  - LZE VNÍMAT JAKO ZOBRAZENÍ $x \mapsto Ax$ (PAK HLEDÁME x, JEHOŽ OBRAZEM JE b)
  - PRO $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ SLOŽENÍ ZOBRAZENÍ $x \mapsto Ax$, $y \mapsto By$ ODPOVÍDÁ ZOBRAZENÍ $x \mapsto (BA)x$ (SKLÁDÁNÍ ZOBRAZENÍ ODPOVÍDÁ NÁSOBENÍ MATIC)



- REGULÁRNÍ MATICE:
  - MATICE $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ČTVERCOVÁ) JE REGULÁRNÍ, MÁ-LI SOUSTAVA $Ax = 0$ (NULOVÝ VEKTOR) JEDINÉ ŘEŠENÍ $x = 0$. JINAK JE A SINGULÁRNÍ
  - SOUSTAVA $Ax = 0$ (S NULOVOU PRAVOU STRANOU) SE NAZÝVÁ HOMOGENNÍ
    - MÁ VŽDY ŘEŠENÍ $x = 0$
  - TVRZENÍ 3.3: PRO $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ JSOU NÁSLEDUJÍCÍ TVRZENÍ EKVIVALENTNÍ:
    1) A JE REGULÁRNÍ,
    2) $RREF(A) = I_n$,
    3) $Rank(A) = n$.
  - DŮKAZ:
    - PLYNE Z ROZBORU GAUSSOVY-JORDANOVY ELIMINACE
    - $(A|0)$ MÁ JEDINÉ ŘEŠENÍ $\Leftrightarrow RREF(A) = (I_n|0) \Leftrightarrow Rank(A) = n$ $\boxtimes$
  - NULOVÁ STRANA NENÍ V DEFINICI REGULÁRNÍ MATICE PODSTATNÁ
  - TVRZENÍ 3.4: PRO $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ JSOU NÁSLEDUJÍCÍ TVRZENÍ EKVIVALENTNÍ
    1) A JE REGULÁRNÍ,
    2) $\exists\, b \in \mathbb{R}^n$: $Ax = b$ MÁ JEDINÉ ŘEŠENÍ
    3) $\forall\, b \in \mathbb{R}^n$: $Ax = b$ MÁ JEDINÉ ŘEŠENÍ
  - DŮKAZ:
    - PLYNE Z GAUSSOVY-JORDANOVY ELIMINACE A TVRZENÍ 3.3 $\boxtimes$

ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI REGULÁRNÍCH MATIC:

- SOUČET REGULÁRNÍCH MATIC NEMUSÍ BÝT REGULÁRNÍ MATICÍ
  - NAPŘÍKLAD $I_n + (-I_n) = 0$
- SOUČIN REGULÁRNÍCH MATIC JE REGULÁRNÍ MATICÍ

  DŮKAZ:
  - MĚJME REGULÁRNÍ $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ A NECHŤ x JE ŘEŠENÍ $(AB)x = 0$
  - BUĎ $y := Bx$, PAK $(AB)x = 0$ LZE PŘEPSAT NA $Ay = 0$
  - A JE REGULÁRNÍ $\Rightarrow y = 0$ JE JEDINÉ ŘEŠENÍ SOUSTAVY $Ay = 0$
  - TEDY $y = Bx = 0$, B JE REGULÁRNÍ $\Rightarrow x = 0$ JE JEDINÉ ŘEŠENÍ $\boxtimes$
- JE-LI ASPOŇ JEDNA Z MATIC $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SINGULÁRNÍ, PAK JE I AB SINGULÁRNÍ

  DŮKAZ:

  1) POKUD JE B SINGULÁRNÍ, PAK $\exists\, x \neq 0 : Bx = 0$
     POTOM $(AB)x = A(Bx) = A \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ AB JE SINGULÁRNÍ
  2) $\underbrace{B \text{ JE REGULÁRNÍ}}_{\Rightarrow\, \exists\, x \neq 0 :\; Bx = y}$ A $\underbrace{A \text{ JE SINGULÁRNÍ}}_{\Rightarrow\, \exists\, y \neq 0 :\; Ay = 0}$

     $\Rightarrow (AB)x = A(Bx) = Ay = 0 \Rightarrow$ AB JE SINGULÁRNÍ $\boxtimes$

MATICE ELEMENTÁRNÍCH ÚPRAV:

- KAŽDÁ ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÁ ÚPRAVA ODPOVÍDÁ MATICI

1) VYNÁSOBENÍ i-TÉHO ŘÁDKU ČÍSLEM $\alpha \neq 0$ ODPOVÍDÁ VYNÁSOBENÍM ZLEVA MATICÍ

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ 0 & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} = I_n + (\alpha - 1) e_i e_i^T$$

2) PŘIČTENÍ α-NÁSOBKU j-TÉHO ŘÁDKU K i-TÉMU ODPOVÍDÁ VYNÁSOBENÍM ZLEVA MATICÍ

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \alpha & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \end{array} = I_n + \alpha e_i e_j^T$$

3) VÝMĚNA i-TÉHO A j-TÉHO ŘÁDKU ODPOVÍDÁ VYNÁSOBENÍM ZLEVA MATICÍ

$$\begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 \; 0 \; 1 \ddots & 1 \\ 1 & \ddots 1 \; 0 \; 1 \ddots 1 \end{pmatrix} \end{array} = I_n + (e_j - e_i)(e_i - e_j)^T$$

- VŠECHNY TYTO MATICE JSOU REGULÁRNÍ

- CELÝ PŘEVOD NA RREF LZE TAKÉ REPREZENTOVAT MATICÍ
- **VĚTA 3.5**: PRO KAŽDÉ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ EXISTUJE REGULÁRNÍ $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ TAKOVÁ, ŽE $\mathrm{RREF}(A) = QA$.
  - DŮKAZ:
    - NECHŤ $E_1, \dots, E_k$ JSOU MATICE REPREZENTUJÍCÍ ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY POUŽITÉ PŘI PŘEVODU NA $\mathrm{RREF}(A)$
    - PAK $\mathrm{RREF}(A) = \underbrace{E_1 \cdots E_k}_{=:Q} A = QA$
    - PROTOŽE $E_1, \dots, E_k$ JSOU REGULÁRNÍ, PAK I Q JE REGULÁRNÍ $\boxtimes$