PODLE TVRZENÍ 1.1, NEMĚNÍME MNOŽINU ŘEŠENÍ

– NYNÍ MŮŽEME DOKONČIT GAUSSOVU ELIMINACI

– **ALGORITMUS GAUSSOVY ELIMINACE**

– VSTUP: SOUSTAVA $(A|b)$, KDE $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

1) POMOCÍ $REF(A|b)$ PŘEVEDEME $(A|b)$ NA ODSTUPŇOVANÝ TVAR $(A'|b')$

2) OZNAČME $r = RANK(A'|b')$ A UVAŽME NÁSLEDUJÍCÍ 3 SITUACE

A) SOUSTAVA NEMÁ ŘEŠENÍ

- NASTANE, POKUD $RANK(A) < RANK(A|b)$

  NEBOLI JE-LI POSLEDNÍ SLOUPEC MATICE $(A|b)$ BÁZICKÝ

- DŮKAZ:

  – $r$-TÝ ŘÁDEK $(A'|b')$ MÁ TVAR $0x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b'_r$

  – ALE $b'_r \neq 0$, PROTOŽE JE NA POZICI PIVOTA $(r, n+1)$ $\boxtimes$

B) SOUSTAVA MÁ ALESPOŇ JEDNO ŘEŠENÍ

- NASTANE, POKUD $RANK(A) = RANK(A|b)$

  NEBOLI JE-LI POSLEDNÍ SLOUPEC MATICE $(A|b)$ NEBÁZICKÝ

- ROZLIŠÍME 2 PODPŘÍPADY

B1) SOUSTAVA MÁ PRÁVĚ JEDNO ŘEŠENÍ

- NASTANE, POKUD $r = n$

  NEBOLI POKUD JE POČET PIVOTŮ ROVNÝ POČTU PROMĚNNÝCH

- ŘEŠENÍ NYNÍ NAJDEME ZPĚTNOU SUBSTITUCÍ = V POŘADÍ

  $k = n, n-1, \dots, 1$ DOSADÍME $x_k := \dfrac{b'_k - \sum_{j=k+1}^{n} a'_{kj} x_j}{a'_{kk}}$

- DŮKAZ:

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a'_{nn} & b'_n \\ & 0 & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \end{array}\right), \text{ TAKŽE}$$

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + \dots + a'_{1,n-1}x_{n-1} + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ &\vdots \\ a'_{n-1,n-1}x_{n-1} + a'_{n-1,n}x_n &= b'_{n-1} \\ a'_{n,n}x_n &= b'_n \end{aligned}$$

DOSADIT $x_n$

DOSADIT $x_{n-1}$

⋮

DOSADIT $x_1$

$\boxtimes$

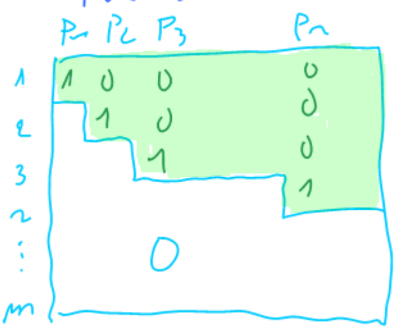
## B2) SOUSTAVA MÁ NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ

- NASTANE, POKUD $r < m$
  NEBOLI EXISTUJÍ ASPOŇ 1 NEBÁZICKÉ SLOUPCE
- MNOŽINU VŠECH ŘEŠENÍ POPÍŠEME PARAMETRICKY
- BÁZICKÉ PROMĚNNÉ $= x_{p_1}, \dots, x_{p_r}$
- NEBÁZICKÉ PROMĚNNÉ = TY ZBÝVAJÍCÍ
  - BUDOU TVOŘIT PARAMETRY NABÝVAJÍCÍ LIBOVOLNÝCH REÁLNÝCH HODNOT
- V POŘADÍ $k = r, r-1, \dots, 1$ DOSADÍME $x_{p_k} := \dfrac{b'_k - \sum_{j=p_k+1}^{m} a'_{kj} x_j}{a'_{kp_k}}$
- $m - r > 0$ OZNAČUJE DIMENZI ŘEŠENÍ

- RANK$(A|b)$ = POČET „VÝZNAMNÝCH" ROVNIC V SOUSTAVĚ, OSTATNÍ JSOU POUZE JEJICH KOMBINACÍ

- **GAUSSOVA – JORDANOVA ELIMINACE**:
  - DRUHÁ METODA NA ŘEŠENÍ SOUSTAV ROVNIC
  - POUŽÍVÁ SPECIÁLNĚJŠÍ TVAR MATICE
  - MATICE $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ JE V **REDUKOVANÉM ODSTUPŇOVANÉM TVARU** (**RREF**), POKUD JE V REF TVARU A NAVÍC PLATÍ:

„REDUCED ROW ECHELON FORM"



a) $a_{1p_1} = \dots = a_{rp_r} = 1$ (NA POZICÍCH PIVOTŮ JSOU 1)

b) $a_{1p_i} = \dots = a_{i-1\,p_i}$ PRO KAŽDÉ $i = 1, \dots, r$ (NAD KAŽDÝM PIVOTEM JSOU SAMÉ NULY)

- PŘÍKLAD MATICE V RREF:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PIVOTY JSME OZNAČILI ORANŽOVĚ

- ALGORITMUS NA PŘEVOD MATICE A DO RREF JE STEJNÝ JAKO ALGORITMUS REF(A), JEN KROK 5) JE NAHRAZEN DVĚMA NOVÝMI

- **ALGORITMUS REF(A):**
  - VSTUP: MATICE $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
    1) $i := 1, j := 1$
    2) IF $a_{kl} = 0$ PRO VŠECHNA $k \geq i$ A $l \geq j$ THEN KONEC
    3) $j := \min\{l : l \geq j, a_{kl} \neq 0$ PRO NĚJAKÉ $k \geq i\}$ PŘESKOČÍME NULOVÉ PODSLOUPEČKY
    4) URČI $k$ TAKOVÉ, ŽE $a_{kj} \neq 0$ PRO $k \geq i$ A VYMĚŇ ŘÁDKY $A_{i*}$ A $A_{k*}$
       POTÉ JE NA POZICI NOVÁ HODNOTA $a_{ij} \neq 0$
    5) POLOŽ $A_{i*} := \frac{1}{a_{ij}} A_{i*}$ (PAK JE NA POZICI NOVÁ HODNOTA $a_{ij} = 1$)
    6) PRO VŠECHNA $k \neq i$ POLOŽ $A_{k*} := A_{k*} - a_{kj} A_{i*}$
    7) $i := i+1, j := j+1$ A JDI NA KROK 2)
- NYNÍ MŮŽEME UVÉST GAUSSOVU–JORDANOVU ELIMINACI PODLE TVRZENÍ 1.1, NEMĚNÍME MNOŽINU ŘEŠENÍ
- **ALGORITMUS GAUSSOVY–JORDANOVY ELIMINACE:**
  - VSTUP: SOUSTAVA $(A|b)$, KDE $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$
    1) POMOCÍ REF(A|b) PŘEVEDEME $(A|b)$ NA ODSTUPŇOVANÝ TVAR $(A'|b')$
    2) OZNAČME $r = \operatorname{RANK}(A'|b')$ A UVAŽME NÁSLEDUJÍCÍ 3 SITUACE

A) SOUSTAVA NEMÁ ŘEŠENÍ
- NASTANE, POKUD $\operatorname{RANK}(A) < \operatorname{RANK}(A|b)$ NEBOLI JE-LI POSLEDNÍ SLOUPEC MATICE $(A|b)$ BÁZICKÝ
- DŮKAZ ANALOGICKY JAKO MINULE

B) SOUSTAVA MÁ ALESPOŇ JEDNO ŘEŠENÍ
- NASTANE, POKUD $\operatorname{RANK}(A) = \operatorname{RANK}(A|b)$ NEBOLI JE-LI POSLEDNÍ SLOUPEC MATICE $(A|b)$ NEBÁZICKÝ
- ROZLIŠÍME 2 PODPŘÍPADY

B1) SOUSTAVA MÁ PRÁVĚ JEDNO ŘEŠENÍ
- NASTANE, POKUD $r = n$ NEBOLI POKUD JE POČET PIVOTŮ ROVNÝ POČTU PROMĚNNÝCH
- ŘEŠENÍ MÁ TVAR $(x_1, \dots, x_n) = (b'_1, \dots, b'_n)$
- DŮKAZ: SOUSTAVA MÁ TVAR $x_1 = b'_1, \dots, x_n = b'_n$ ⊠

B2) SOUSTAVA MÁ NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ

- NASTANE, POKUD $r<n$
  NEBOLI EXISTUJÍ ASPOŇ 2 NEBÁZICKÉ SLOUPCE
- MNOŽINU ŘEŠENÍ POPÍŠEME PARAMETRICKY
- OZNAČME NEBÁZICKÉ PROMĚNNÉ JAKO $x_i, i \in N = \{1,\dots,n\} \setminus \{p_1,\dots,p_r\}$
- NEBÁZICKÉ PROMĚNNÉ NABÝVAJÍ LIBOVOLNÝCH REÁLNÝCH HODNOT, BÁZICKÉ DOPOČÍTÁME ZPĚTNOU SUBSTITUCÍ
- PRO $k=r, r-1, \dots, 1$ DOSADÍME $x_{p_k} := b'_k - \sum_{j \in N, j > p_k} a'_{kj} x_j$

- GAUSSOVA-JORDANOVA ELIMINACE JE O NĚCO POMALEJŠÍ NEŽ GAUSSOVA ELIMINACE, ALE BUDE SE NÁM HODIT U INVERZNÍCH MATIC

- VĚTA 2.1 (JEDNOZNAČNOST RREF):
RREF TVAR MATICE JE JEDNOZNAČNĚ URČEN.

DŮKAZ:
- SPOREM - NECHŤ MÁ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ DVA RREF TVARY $A_1 \neq A_2$
- BUĎ $i$ INDEX PRVNÍHO SLOUPCE, VE KTERÉM SE $A_1$ A $A_2$ LIŠÍ
- Z $A, A_1, A_2$ ODSTRANÍME SLOUPCE $i+1, \dots, n$ A VŠECHNY NEBÁZICKÉ SLOUPCE Z $1, \dots, i-1$
- $B, B_1, B_2$ = VÝSLEDNÉ MATICE (DOSTALI JSME JE STEJNÝMI ÚPRAVAMI JAKO $A_1, A_2$ Z $A$)
- $B_1$ A $B_2$ JSOU RREF TVARY $B$

$$B_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & c_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & c_k \\ & 0 & & c_{k+1} \\ & & & \vdots \end{array}\right), \quad B_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & b_k \\ & 0 & & b_{k+1} \\ & & & \vdots \end{array}\right),$$

KDE $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ MÁME RŮZNÁ ŘEŠENÍ PRO, KTERÉ MÁ BÝT JEDNOZNAČNÁ $\Rightarrow$ SPOR $\boxtimes$

(JE-LI SOUSTAVA NEŘEŠITELNÁ, PAK JE POSLEDNÍ SLOUPEC BÁZICKÝ A TEDY $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$)

- VĚTA 2.2 (FROBENIOVA VĚTA):
SOUSTAVA $(A|b)$ MÁ $\geq 1$ ŘEŠENÍ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{RANK}(A|b) = \mathrm{RANK}(A)$

- DŮKAZ: PŘÍMÝ VÝSLEDEK GAUSSOVY ELIMINACE $\boxtimes$

## MATICE:

- UKÁŽEME SI ZÁKLADNÍ TYPY MATIC A MATICOVÉ OPERACE
- **ROVNOST** - DVĚ MATICE $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m' \times n'}$ SE ROVNAJÍ $(A = B)$, POKUD $m = m'$, $n = n'$ A $A_{ij} = B_{ij}$ PRO KAŽDÉ $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$
  (A, B MAJÍ STEJNÉ ROZMĚRY A PRVKY)
- **SOUČET** - PRO $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ JE SOUČTEM $A + B$ MATICE TYPU $m \times n$ S PRVKY $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
- **NÁSOBEK** - PRO $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ JE NÁSOBKEM $\alpha A$ MATICE TYPU $m \times n$ S PRVKY $(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$
- **ODČÍTÁNÍ** - ZAVEDEME PŘES SOUČET A NÁSOBEK: $A - B := A + (-1)B$
- **NULOVÁ MATICE** = MATICE SE SAMÝMI NULAMI
  - ZNAČÍME $0$
- **TVRZENÍ 2.3** (VLASTNOSTI SOUČTU A NÁSOBKU MATIC): PRO $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ PLATÍ:
  1) $A + B = B + A$, (KOMUTATIVITA)
  2) $(A + B) + C = A + (B + C)$, (ASOCIATIVITA)
  3) $A + 0 = A$,
  4) $A + (-1)A = 0$,
  5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
  6) $1 \cdot A = A$
  7) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (DISTRIBUTIVITA)
  8) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (DISTRIBUTIVITA)

REDUKCE DANÉ VLASTNOSTI NA REÁLNÁ ČÍSLA

- DŮKAZ:
  - UKÁŽEME JEN 1), ZBYTEK PONECHÁME JAKO CVIČENÍ

  1) $A + B$, $B + A$ MAJÍ TYP $m \times n$

  $$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = B_{ij} + A_{ij} = (B+A)_{ij}$$

  KOMUTATIVITA SČÍTÁNÍ REÁLNÝCH ČÍSEL

$\boxtimes$

**Součin matic** – buď $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$

– pak $AB$ je matice typu $m\times n$ s prvky $(AB)_{ij} := \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$

– Příklad:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&3\\4&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17&22\\38&49\end{pmatrix}$$

$1\cdot1+2\cdot2+3\cdot4$

$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5$

$4\cdot1+5\cdot3+6\cdot5$

$1\cdot4+2\cdot5+6\cdot4$

– **Jednotková matice** – čtvercová matice $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s prvky

↳ někdy značená $I_n$

$$I_{ij} = \begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$I_n = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}}_{n} \; n$$

– $i$-tým sloupcem $I_n$ je jednotkový vektor $e_i = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow i$

– **Tvrzení 2.4** (vlastnosti součinu matic): Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a matice $A, B, C$ vhodných rozměrů platí

1) $(AB)C = A(BC)$, (asociativita)
2) $A(B+C) = AB + AC$, (distributivita zleva)
3) $(A+B)C = AC + BC$, (distributivita zprava)
4) $\alpha AB = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,
5) $0A = A0 = 0$,
6) $I_m A = A I_n = A$, kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

– Důkaz:

– ukážeme jen 1), zbytek ponecháme jako cvičení

1) nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$

– pak $(AB)C$ i $A(BC)$ mají typ $m\times m$

– na pozici $(i,j)$ máme

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{p} A_{il}B_{lk}\right) C_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} A_{il}B_{lk}C_{kj}$$

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{l=1}^{p} A_{il}(BC)_{lj} = \sum_{l=1}^{p} A_{il}\left(\sum_{k=1}^{n} B_{lk}C_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} A_{il}B_{lk}C_{kj} \quad \boxtimes$$

komutativita sčítání reálných čísel

– násobení matic není komutativní!

$A = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot B \neq B\cdot A$