MATICOVÉ REPREZENTACE LINEÁRNÍCH ZOBRAZENÍ:

- KAŽDÉ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ MEZI (KONEČNĚ GENEROVANÝMI) VEKTOROVÝMI PROSTORY LZE REPREZENTOVAT MATICOVĚ
- PRÁCE SE SOUŘADNICEMI (POČÍTÁME PAK NAD ARITMETICKÝMI PROSTORY)

- BUĎ $f: U \to V$ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ, $B_U = \{x_1, \dots, x_n\}$ BÁZE U NAD $\mathbb{T}$ A $B_V = \{y_1, \dots, y_m\}$ BÁZE V NAD $\mathbb{T}$. NECHŤ $f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ PRO $j = 1, \dots, n$. POTOM $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{T}^{m \times n}$ JE MATICÍ LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ VŮČI BÁZÍM B_U, B_V.
  - ZNAČÍME ${}_{B_V}[f]_{B_U}$

$$ {}_{B_V}[f]_{B_U} = \left([f(x_1)]_{B_V}, \dots, [f(x_n)]_{B_V} \right) $$

  - NEBOLI j-TÝ SLOUPEC A JE TVOŘEN SOUŘADNICEMI OBRAZU x_j

- VÝZNAM MATICE ZOBRAZENÍ ZACHYCUJE NÁSLEDUJÍCÍ VĚTA
  - MATICE ZOBRAZENÍ PŘEVÁDÍ SOUŘADNICE VEKTORU K DANÉ BÁZI B_U NA SOUŘADNICE OBRAZU VŮČI B_V

- **VĚTA 12.1:** PRO LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ $f: U \to V$, BÁZI $B_U = \{x_1, \dots, x_n\}$ PROSTORU U A BÁZI $B_V = \{y_1, \dots, y_m\}$ PROSTORU V PLATÍ PRO KAŽDÉ $x \in U$

$$ [f(x)]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U}. $$

- DŮKAZ:
  - OZNAČME $A := {}_{B_V}[f]_{B_U}$. PRO $x \in U$ JE $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, KDE $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T}$. NEBOLI $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T = [x]_{B_U}$.
  - POTOM

$$ f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right) \underset{\text{LINEARITA}}{=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(x_j) \underset{\text{DEFINICE } A}{=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) = $$

$$ = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_j a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij}\right)}_{i\text{-TÁ SOUŘADNICE } [f(x)]_{B_V}} y_i \qquad \boxtimes $$

HODNOTA JE $(A \cdot [x]_{B_U})_i$ = i-TÁ SLOŽKA ${}_{B_V}[f]_{B_U} [x]_{B_U}$

- K_{kan} = kanonická báze složená z jednotkových vektorů

- **Důsledek 12.2:**
Každé lineární zobrazení $f: T^n \to T^m$ se dá vyjádřit jako $f(x) = Ax$ pro nějaké $A \in T^{m \times n}$.

- Důkaz:
pro každé $x \in T^n$ máme

Věta 12.1

$[z]_{kan} = z$ pro $\forall$ vektor z

$$[f(x)]_{kan} = {}_{kan}[f]_{kan} \, [x]_{kan} = {}_{kan}[f]_{kan} \cdot x$$ ⊠

- Dál ukážeme, že ${}_{B_U}[f]_{B_V}$ je jediná matice A splňující

$$[f(x)]_{B_V} = A \cdot [x]_{B_U} \text{ pro každé } x \in U \qquad (*)$$

- **Věta 12.3** (jednoznačnost matice lineárního zobrazení):
Buď $f: U \to V$ lineární zobrazení, B_U báze U a B_V báze V. Pak jediná matice A splňující $(*)$ je $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$.

- Důkaz:
  - nechť B_U obsahuje vektory $x_1, \dots, x_n$
  - sporem: $\exists$ matice $A \neq A'$ splňující $(*)$ pro f
  - protože $A \neq A'$, tak existuje $s \in T^n$ takový, že $As \neq A's$ (stačí zvolit $s^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ – pozice, kde mají A, A' jiný sloupec)
  - definujme $x = \sum_{j=1}^{n} s_j x_j$
  - pak $[f(x)]_{B_V} = As \neq A's = [f(x)]_{B_V}$ ⇒ spor s jednoznačností souřadnic (Věta 9.2) ⊠

- platí i „obrácené"
- pro dané $A \in T^{m \times n}$ existuje právě jedno lineární $f: U \to V$ takové, že $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$
  - sloupce A = souřadnice obrazů báze B_U vůči B_V
    - zbytek plyne z Věty 11.5

⇒ bijekce mezi $T^{m \times n}$ a lineárními zobrazeními $f: U \to V$

- id = IDENTITA (SPECIÁLNÍ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ)

- NECHŤ B_1 A B_2 JSOU BÁZE VEKTOROVÉHO PROSTORU V. PAK MATICÍ PŘECHODU OD B_1 K B_2 JE MATICE ${}_{B_2}[id]_{B_1}$.
  - PRO PŘECHODY MEZI SOUŘADNICOVÝMI SYSTÉMY
  - PRO $x \in U$ PLATÍ $[x]_{B_2} = {}_{B_2}[id]_{B_1} \cdot [x]_{B_1}$
  - PLATÍ ${}_B[id]_B = I_n$ PRO LIBOVOLNOU BÁZI B

- PŘÍKLAD:

  PRO BÁZI B PROSTORU T^n MÁME $[x]_B = {}_B[id]_{kan} [x]_{kan} =$
  $= {}_B[id]_{kan} \cdot x$

  $\Rightarrow$ SOUŘADNICE x LZE ZÍSKAT VYNÁSOBENÍM MATICÍ PŘECHODU

- SKLÁDÁNÍ LINEÁRNÍCH ZOBRAZENÍ:
  - PRO $f: U \to V$, $g: V \to W$ JE $g \circ f: U \to W$ ZOBRAZENÍ DANÉ PŘEDPISEM $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

- TVRZENÍ 12.4:

  JSOU-LI $f: U \to V$, $g: V \to W$ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ, PAK JE $g \circ f$ OPĚT LINEÁRNÍM ZOBRAZENÍM.

  - DŮKAZ:
    - OVĚŘÍME PŘÍMO Z DEFINICE. BUĎ $x, y \in U$, $\alpha \in T$. PAK

$$(g \circ f)(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x)+f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) =$$
$$= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$$

$$(g \circ f)(\alpha x) = g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha g(f(x)) =$$
$$= \alpha (g \circ f)(x)$$

$\boxtimes$

- PLATÍ, ŽE MATICE SLOŽENÉHO ZOBRAZENÍ JE SOUČINEM MATIC PŘÍSLUŠNÝCH ZOBRAZENÍ (MOTIVACE PRO MATICOVÉ NÁSOBENÍ)

- **VĚTA 12.5**: Pro lineární zobrazení $f: U \to V$, $g: V \to W$ a báze B_U pro U, B_V pro V a B_W pro W platí:

$${}_{B_W}[g \circ f]_{B_U} = {}_{B_W}[g]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}.$$

- DŮKAZ:

pro každé $x \in U$ platí

VĚTA 12.1 pro g

$$[(g \circ f)(x)]_{B_W} = [g(f(x))]_{B_W} = {}_{B_W}[g]_{B_V} \cdot [f(x)]_{B_V} =$$

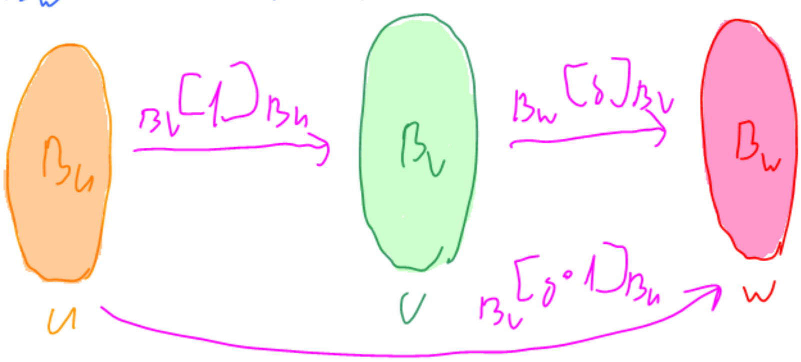
$$= {}_{B_W}[g]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U}$$

VĚTA 12.1 pro f

- podle jednoznačnosti matice zobrazení (VĚTA 12.3) je

$${}_{B_W}[g \circ f]_{B_U} = {}_{B_W}[g]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}$$

$\boxtimes$



- PŘÍKLAD:
  - mějme báze B_1, B_2, B_3, B_4 a ${}_{B_2}[f]_{B_1}$. Jak určit ${}_{B_4}[f]_{B_3}$
  - podle VĚTY 12.5 pro $f = id \circ f \circ id$ je

$${}_{B_4}[f]_{B_3} = {}_{B_4}[id]_{B_2} \cdot {}_{B_2}[f]_{B_1} \cdot {}_{B_1}[id]_{B_3}$$

$\Rightarrow$ stačí matice přechodu a násobení

- ISOMORFISMUS:
  - ISOMORFISMUS MEZI PROSTORY U A V NAD TĚLESEM T JE VZÁJEMNĚ JEDNOZNAČNÉ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ $f: U \to V$

    BIJEKCE

    - U A V JSOU ISOMORFNÍ, POKUD MEZI NIMI EXISTUJE ISOMORFISMUS
    - ISOMORFNÍ PROSTORY SE Z HLEDISKA LINEÁRNÍ ALGEBRY CHOVAJÍ „STEJNĚ"

  - PŘÍKLADY: OTOČENÍ, PŘEKLÁPĚNÍ A ŠKÁLOVÁNÍ V $\mathbb{R}^2$ JSOU ISOMORFISMY
    - OTOČENÍ, PŘEKLÁPĚNÍ A ŠKÁLOVÁNÍ
    - PROJEKCE ISOMORFISMEM NENÍ

  - TVRZENÍ 12.6 (VLASTNOSTI ISOMORFISMU):
    1) JE-LI $f: U \to V$ ISOMORFISMUS, PAK $f^{-1}: V \to U$ EXISTUJE A JE TO TAKÉ ISOMORFISMUS
    2) JSOU-LI $f: U \to V$ A $g: V \to W$ ISOMORFISMY, PAK JE $g \cdot f: U \to W$ TAKÉ ISOMORFISMUS
    3) $f: U \to V$ JE ISOMORFISMEM $\Leftrightarrow$ LIBOVOLNÁ BÁZE PROSTORU U SE ZOBRAZÍ NA BÁZI PROSTORU V
    4) JE-LI $f: U \to V$ ISOMORFISMUS, PAK $\dim(U) = \dim(V)$.

  - DŮKAZ:
    1) f JE BIJEKCE $\Rightarrow f^{-1}$ EXISTUJE A JE TO TAKÉ BIJEKCE

       LINEARITA: PRO $v_1, v_2 \in V$ BUĎ $u_1 = f^{-1}(v_1)$, $u_2 = f^{-1}(v_2)$

       PAK $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = v_1 + v_2$ A TEDY $f^{-1}(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2)$.

       PRO NÁSOBKY: BUĎ PRO $v \in V$ $u = f^{-1}(v)$. PAK $f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha v$. TEDY $f^{-1}(\alpha v) = \alpha u = \alpha f^{-1}(v)$.
    2) SNADNO Z TVRZENÍ 12.4