SPOJENÍ PODPROSTORŮ U A V VEKTOROVÉHO PROSTORU W JE DEFINOVANÉ JAKO

$$U+V = \{u+v : u\in U,\ v\in V\}$$

- TVRZENÍ 10.1:

  PRO PODPROSTORY U A V VEKTOROVÉHO PROSTORU W PLATÍ

  $U+V = \mathrm{SPAN}(U\cup V)$.

  - DŮKAZ:

    1) $\subseteq$: TRIVIÁLNÍ Z UZAVŘENOSTI NA SOUČTY PROSTORU $\mathrm{SPAN}(U\cup V)$

    2) $\supseteq$: STAČÍ UKÁZAT $U+V\supseteq U\cup V$ A $U+V\Subset W$

       $U+V\supseteq U\cup V$: PLYNE Z $o\in U,V$, PROTOŽE $u=u+o\in U+V$, $v=o+v\in U+V$

       $U+V\Subset W$: STAČÍ OVĚŘIT UZAVŘENOST NA SOUČTY A NÁSOBKY

       MĚJME $x_1,x_2\in U+V$ A $\alpha\in T$. PAK $x_1=u_1+v_1$ A $x_2=u_2+v_2$ PRO $u_1,u_2\in U$ A $v_1,v_2\in V$

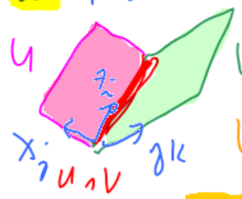
       SOUČTY: $x_1+x_2=u_1+u_2+v_1+v_2=(u_1+u_2)+(v_1+v_2)\in U+V$

       NÁSOBKY: $\alpha x_1=\alpha(u_1+v_1)=\alpha u_1+\alpha v_1\in U+V$ $\boxtimes$

- VĚTA 10.2 (DIMENZE SPOJENÍ):

  PRO PODPROSTORY U A V VEKTOROVÉHO PROSTORU W PLATÍ

  $\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=\dim(U)+\dim(V)$



  - DŮKAZ:
    - PLÁN: Z UZAVŘENOSTI PODPROSTORŮ NA PRŮNIKY JE $U\cap V\Subset W$ A TEDY $U\cap V$ MÁ BÁZI $z_1,\dots,z_d$. PODLE VĚTY 9.7 JI LZE ROZŠÍŘIT NA BÁZI $z_1,\dots,z_d,x_1,\dots,x_m$ PODPROSTORU U A NA BÁZI $z_1,\dots,z_d,y_1,\dots,y_m$ PODPROSTORU V. PAK STAČÍ UKÁZAT, ŽE $z_1,\dots,z_d,x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_m$ JE BÁZÍ $U+V$. → LIN. NEZ. SYSTÉM GENERÁTORŮ

    - GENERÁTORNOST:
      - MÁME-LI $x\in U+V$, PAK $x=u+v$ PRO $u\in V$ A $v\in V$
      - VYJÁDŘÍME $u=\sum_{i=1}^{d}\alpha_i z_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j x_j$ A $v=\sum_{i=1}^{d}\gamma_i z_i+\sum_{k=1}^{m}\delta_k y_k$
      - POTOM $x=u+v=\sum_{i=1}^{d}(\alpha_i+\gamma_i)z_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j x_j+\sum_{k=1}^{m}\delta_k y_k$ JE LINEÁRNÍ KOMBINACÍ VEKTORŮ $z_1,\dots,z_d,x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_m$

      $\Rightarrow$ $z_1,\dots,z_d,x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_m$ JE SYSTÉMEM GENERÁTORŮ

- LINEÁRNÍ NEZÁVISLOST: ②

- PRO $o = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k y_k$ CHCEME UKÁZAT, ŽE VŠECHNY KOEFICIENTY JSOU NULOVÉ
- OZNAČME $z = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j = -\sum_{k=1}^{m} \gamma_k y_k$. PAK $z \in U \cap V$ A TEDY LZE ZAPSAT JAKO $z = \sum_{i=1}^{d} \delta_i z_i$. NEBOLI $\sum_{i=1}^{d} \delta_i z_i + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k y_k = o$
- $z_1, \dots, z_d, y_1, \dots, y_m$ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ $\Rightarrow \delta_1 = \dots = \delta_d = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$
- PO DOSAZENÍ JE $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j = o$. PROTOŽE $z_1, \dots, z_d, x_1, \dots, x_m$ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ, TAK DOSTÁVÁME $\alpha_1 = \dots = \alpha_d = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$

$\Rightarrow z_1, \dots, z_d, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ ⊠

- MATICOVÉ PROSTORY: S TEORIÍ VEKTOROVÝCH PROSTORŮ
  - SKLOUBÍME TEORII MATIC ZAVEDEME NÁSLEDUJÍCÍ VEKTOROVÉ PROSTORY:
  - PRO MATICI $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$
    1) SLOUPCOVÝ PROSTOR $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\}$
    2) ŘÁDKOVÝ PROSTOR $\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{A_{1*}, \dots, A_{m*}\} = \mathcal{S}(A^T)$
    3) JÁDRO $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^m : Ax = o\}$
  - Z DEFINICE $\mathcal{S}(A) \Subset \mathbb{T}^m$, $\mathcal{R}(A) \Subset \mathbb{T}^n$
  - UKÁŽEME, ŽE $\mathrm{Ker}(A) \Subset \mathbb{T}^m$:
    - $o \in \mathrm{Ker}(A)$, PROTOŽE $Ao = o$
    - UZAVŘENOST NA SOUČTY: PRO $x, y \in \mathrm{Ker}(A)$ PLATÍ $Ax, Ay = o$ A TEDY $A(x+y) = Ax + Ay = o + o = o$
    - UZAVŘENOST NA NÁSOBKY: PRO $x \in \mathrm{Ker}(A)$ PLATÍ $Ax = o$ A TEDY PRO $\alpha \in \mathbb{T}$ MÁME $A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha o = o$

- TVRZENÍ No.3: PRO $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ PLATÍ: $\mathcal{S}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{T}^m\}$, $\mathcal{R}(A) = \{A^T y : y \in \mathbb{T}^m\}$
  - DŮKAZ:
    - PLYNE Z TOHO, ŽE $Ax = \sum_{j=1}^{m} x_j A_{*j}$ JE LINEÁRNÍ KOMBINACÍ SLOUPCŮ A A $A^T y = \sum_{i=1}^{m} y_i A_{i*}^T$ JE LINEÁRNÍ KOMBINACÍ ŘÁDKŮ A. ⊠

- TVRZENÍ 10.4: PRO $V \subseteq T^n$ EXISTUJÍ MATICE $A \in T^{n \times m}$, $B, C \in T^{m \times n}$ TAKOVÉ, ③ ŽE $V = \mathcal{S}(A)$, $V = \mathcal{R}(B)$, $V = Ker(C)$.

- DŮKAZ: STAČÍ, ABY GENERÁTORY $v_1, \ldots, v_m$ V TVOŘILY SLOUPCE A A ŘÁDKY B. TVRZENÍ O JÁDRU SI DOKÁŽEME POZDĚJI $\boxtimes$

- UKÁŽEME, ŽE PO PŘENÁSOBENÍ MATICÍ ZLEVA DOSTANEME PODPROSTOR $\mathcal{R}(A)$
  - DÁVÁ SMYSL: ŘÁDEK MATICE QA JE LINEÁRNÍ KOMBINACÍ ŘÁDKŮ MATICE A A VYBRANÝMI LINEÁRNÍMI KOMBINACEMI VYGENERUJEME JEN PODPROSTOR

- TVRZENÍ 10.5: PRO MATICE $A \in T^{m \times n}$ A $Q \in T^{p \times m}$ PLATÍ
  1) $\mathcal{R}(QA)$ JE PODPROSTOREM $\mathcal{R}(A)$,
  2) PLATÍ-LI $A_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j}$ PRO NĚJAKÉ $k \in \{1, \ldots, n\}$ A NĚJAKÁ $\alpha_j \in T$, PAK $(QA)_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- DŮKAZ:
  1) VÍME, ŽE $\mathcal{R}(QA) \subseteq T^n$ A TEDY STAČÍ UKÁZAT $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$
    - PRO KAŽDÉ $x \in \mathcal{R}(QA)$ EXISTUJE $y \in T^p$ TAKOVÉ, ŽE
    $x = (QA)^T y = A^T Q^T y = A^T (Q^T y) \in \mathcal{R}(A)$ TVRZENÍ 10.3
  2) MÁME $(QA)_{*k} = Q A_{*k} = Q\left(\sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j}\right) = \sum_{j \neq k} \alpha_j Q A_{*j} =$
  $= \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$ $\boxtimes$

- SLOUPCOVÉ PODPROSTORY UŽ SMYSLU ČÁSTI 1) POROVNÁVAT NELZE, PROTOŽE $\mathcal{S}(A) \subseteq T^m$, ALE $\mathcal{S}(QA) \subseteq T^p$

- NICMÉNĚ PODLE 2) JE-LI SLOUPEC A_{*i} LINEÁRNĚ ZÁVISLÝ NA OSTATNÍCH SLOUPCÍCH MATICE A, PAK JE $(QA)_{*i}$ LIN. ZÁVISLÝ NA OSTATNÍCH SLOUPCÍCH MATICE QA

- POKUD NÁSOBÍME REGULÁRNÍ MATICÍ Q PAK DOSTANEME SILNĚJŠÍ VERZI TVRZENÍ 10.5
  - VE 2) SE ZACHOVÁVÁ I LINEÁRNÍ NEZÁVISLOST

- **TVRZENÍ 10.6**: PRO MATICE $A \in T^{m\times n}$ A REGULÁRNÍ $Q \in T^{p\times m}$ PLATÍ

1) $R(QA) = R(A)$,
2) ROVNOST $A_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}$ PRO NĚJAKÉ $k \in \{1,\dots,n\}$ A NĚJAKÁ $\alpha_j \in T$ PLATÍ $\iff$ $(QA)_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- DŮKAZ:

1) TVRZENÍ 10.5 PRO $Q, A \Rightarrow R(QA) \subseteq R(A)$
   TVRZENÍ 10.5 PRO $Q^{-1}, QA \Rightarrow R(A) = R(Q^{-1}(QA)) \subseteq R(QA)$
2) IMPLIKACE $\Rightarrow$ PLYNE Z TVRZENÍ 10.5 PRO Q, A
   IMPLIKACE $\Leftarrow$ PLYNE Z TVRZENÍ 10.5 PRO Q^{-1}, QA ⊠

- **VĚTA 10.7** (MATICOVÉ PROSTORY A RREF): PRO $A \in T^{m\times n}$ A JEJÍ RREF TVAR A^R S PIVOTY NA POZICÍCH $(1,p_1),\dots,(r,p_r)$, KDE $r = \mathrm{RANK}(A)$, PLATÍ

1) NENULOVÉ ŘÁDKY MATICE A^R (TEDY $A^R_{1*},\dots,A^R_{r*}$) TVOŘÍ BÁZI $R(A)$
2) SLOUPCE $A_{*p_1},\dots,A_{*p_r}$ TVOŘÍ BÁZI $S(A)$
3) $\dim(S(A)) = \dim(R(A)) = r$ VĚTA 3.5

- DŮKAZ:

JIŽ VÍME, ŽE EXISTUJE REGULÁRNÍ Q TAKOVÁ, ŽE $A^R = QA$

1) TVRZENÍ 10.6 $\Rightarrow R(A) = R(QA) = R(A^R)$. NENULOVÉ ŘÁDKY A^R JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ A TVOŘÍ TAK BÁZI $R(A^R) = R(A)$
2) SLOUPCE $A^R_{*p_1},\dots,A^R_{*p_r}$ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ A GENERUJÍ $S(A^R)$:
$$A^R_{*j} = \sum_{i=1}^{m} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} A^R_{*p_i}.$$
TVOŘÍ TAK BÁZI $S(A^R)$. Z TVRZENÍ 10.6 JE $A_{*p_1},\dots,A_{*p_r}$ BÁZÍ $S(A)$
3) PLYNE Z PŘEDEŠLÝCH DVOU ČÁSTÍ (DIMENZE = VELIKOST BÁZE) ⊠

- ČÁST 3) ŘÍKÁ, ŽE $\mathrm{RANK}(A) = \dim(R(A)) = \dim(S(A)) = \dim(R(A^T)) = \mathrm{RANK}(A^T)$

$\Rightarrow$ PRO KAŽDOU MATICI $A \in T^{m\times n}$ PLATÍ $\mathrm{RANK}(A) = \mathrm{RANK}(A^T)$

- PROTOŽE $Ax = b \iff b \in S(A)$, TAK DOSTÁVÁME I FROBENIOVU VĚTU (VĚTA 2.2)

- VĚTA 10.4 (O DIMENZI JÁDRA A HODNOSTI MATICE):

PRO KAŽDOU MATICI $A \in T^{m \times n}$ PLATÍ $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{RANK}(A) = n$.

5