Diskrétní matematika – příklady na 8. cvičení*

1 Základy pravděpodobnosti podruhé

Konečný pravděpodobnostní prostor je pár (Ω, P), kde Ω je konečná množina *elementárních jevů* a $P\colon 2^\Omega \to [0,1]$ je funkce taková, že $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$ a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pro každé dvě disjunktní množiny $A, B \subseteq \Omega$. Podmnožiny $A \subseteq \Omega$ nazýváme *jevy* a $P(A)$ je *pravděpodobnost jevu* A. Jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou *nezávislé*, pokud pro každé $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ platí $P\left(\cap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$. Jsou-li A a B jevy s $P(B) > 0$, pak *podmíněná pravděpodobnost* $P(A \mid B)$ značí pravděpodobnost A za podmínky, že platí B. Máme $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Náhodnou veličinou na Ω je funkce $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$. *Střední hodnota* $\mathbb{E}[X]$ náhodné veličiny X se rovná $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$. Platí linearita střední hodnoty, čili pro každé dvě náhodné veličiny X a Y na Ω a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ a $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}[X]$. Jako *indikátorovou proměnnou* jevu A nazýváme náhodnou veličinu $I_A\colon \Omega \to \{0,1\}$, kde $I_A(\omega) = 1$, pokud $\omega \in A$ a $I_A(\omega) = 0$ jinak. Pro I_A platí $\mathbb{E}[I_A] = P(A)$.

Markovova nerovnost. *Pro nezápornou náhodnou veličinu X se střední hodnotou $\mathbb{E}[X] = m > 0$ platí pro každé reálné číslo $t > 0$*

$$P\left(X \geq tm\right) \leq \frac{1}{t}.$$

Příklad 1. *Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině n lidí alespoň 2 mají narozeniny ve stejný den?*

Příklad 2. *Dokažte, že pro každých n jevů $A_1, \ldots, A_n$ v konečném pravděpodobnostním prostoru platí*

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Uveďte formální důkaz založený na definici pravděpodobnostního prostoru.

Příklad 3. *Mějme n bodů v rovině, kde žádné tři neleží na společné přímce. Mezi každými dvěma body nakreslíme úsečku s pravděpodobností $1/2$.*

(a) Pro $k \in \{1, \ldots, n\}$, jaká je střední hodnota počtu X_n k-tic daných bodů takových, že mezi každým párem bodů této k-tice je nakreslená úsečka?

(b) Pro jak velké $k = k(n)$ téměř jistě nenajdeme žádnou k-tici takových bodů? Neboli pro jak velké $k = k(n)$ je $\lim_{n \to \infty} P(X_n \geq 1) = 0$?

Hint: Markovova nerovnost.

Příklad 4. *Dokažte, že jsou-li A a B nezávislé jevy v konečném pravděpodobnostním prostoru (Ω, P), pak jejich doplňky $\overline{A} = \Omega \setminus A$ a $\overline{B} = \Omega \setminus B$ jsou nezávislé.*

Příklad 5. *Dokažte, že v konečném pravděpodobnostním prostoru (Ω, P) platí $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$ pro každou náhodnou veličinu X na Ω. Jako $\mathbb{E}[X^2]$ značíme výraz $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)^2 P(\{\omega\})$.*

Hint: Dokažte $0 \leq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/