

# Diskrétní matematika – příklady na 7. cvičení\*

## 1 Základy pravděpodobnosti

*Konečný pravděpodobnostní prostor* je pár  $(\Omega, P)$ , kde  $\Omega$  je konečná množina *elementárních jevů* a  $P: 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$  je funkce taková, že  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$  a  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  pro každé dvě disjunktní množiny  $A, B \subseteq \Omega$ . Podmnožiny  $A \subseteq \Omega$  nazýváme *jevy* a  $P(A)$  je *pravděpodobnost jevu*  $A$ . Jevy  $A_1, \dots, A_n$  jsou *nezávislé*, pokud pro každé  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  platí  $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$ . Jsou-li  $A$  a  $B$  jevy s  $P(B) > 0$ , pak *podmíněná pravděpodobnost*  $P(A | B)$  značí pravděpodobnost  $A$  za podmínky, že platí  $B$ . Máme  $P(A | B) = P(A \cap B)/P(B)$ .

*Náhodnou veličinou* na  $\Omega$  je funkce  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . *Střední hodnota*  $\mathbb{E}[X]$  náhodné veličiny  $X$  se rovná  $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$ . Platí linearita střední hodnoty, čili pro každé dvě náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  na  $\Omega$  a každé  $\alpha \in \mathbb{R}$  platí  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$  a  $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}[X]$ . Jako *indikátorovou proměnnou* jevu  $A$  nazýváme náhodnou veličinu  $I_A: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ , kde  $I_A(\omega) = 1$ , pokud  $\omega \in A$  a  $I_A(\omega) = 0$  jinak. Pro  $I_A$  platí  $\mathbb{E}[I_A] = P(A)$ .

**Příklad 1.** *U hrací kostky, kde každé číslo má stejnou pravděpodobnost hodu  $\frac{1}{6}$ , uvažte jevy:*

(a)  $A$  – padlo sudé číslo,

(b)  $B$  – padlo číslo větší než 3.

*Rozhodněte, zda jsou tyto jevy závislé či nezávislé.*

**Příklad 2.** *Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dcery je stejná jako pravděpodobnost narození syna. Víme, že daná rodina má právě dvě děti a že aspoň jeden z nich je chlapec. Jaká je pravděpodobnost, že mají dva chlapce? Jaký pravděpodobnostní prostor zvolíte?*

**Příklad 3.** *Na lovu si každý z celkem  $n$  myslivců uniformně náhodně vybere jednoho z  $n$  zajíců a poté všichni myslivci naráz vystřelí a žádný nemine. Jaká je střední hodnota počtu nezasažených zajíců? Jaký pravděpodobnostní prostor uvažujeme?*

**Příklad 4.** *Dokažte, že jsou-li  $A$  a  $B$  nezávislé jevy v konečném pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, P)$ , pak jejich doplňky  $\bar{A} = \Omega \setminus A$  a  $\bar{B} = \Omega \setminus B$  jsou nezávislé.*

**Příklad 5.** *Dokažte, že v konečném pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, P)$  platí  $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$  pro každou náhodnou veličinu  $X$  na  $\Omega$ . Jako  $\mathbb{E}[X^2]$  značíme výraz  $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)^2 P(\{\omega\})$ .*

*Hint: Dokažte  $0 \leq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ .*

**Příklad 6 (\*)**. *Monty hall problem: Jste v televizní soutěži, ve které si jako výhru můžete odnést nové auto. Problémem je, že auto je schované za jedněmi ze tří dveří, za každými s toutéž pravděpodobností, a za zbýlými dvěma dveřmi je jen kupka hnoje. K získání auta musíte ukázat na dveře, za kterými je auto schované. Na rozdíl od moderátora soutěže nevíte, které to jsou, a tak si vyberete uniformně náhodně jedny z nich. Moderátor poté zvolí jedny ze dveří, které jste nevybrali, a odhalí, že za nimi byla schovaná kupka hnoje (má-li moderátor na výběr z více dveří, které odhalit, také si vybere uniformně náhodně). Poté vám dá možnost si svou volbu rozmyslet a případně ukázat na druhé ještě neotevřené dveře. Za předpokladu, že raději vyhrajete nové auto než kupku hnoje, využijete jeho nabídku?*

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>