

Diskrétní matematika – příklady na 10. cvičení*

1 Stromy

Strom je souvislý graf bez cyklů. Ekvivalentní definice jsou:

- (a) graf, kde každé dva vrcholy lze spojit jednoznačně určenou cestou,
- (b) souvislý graf, který přestane být souvislý po odebrání libovolné hrany,
- (c) graf bez cyklů, kde po přidání libovolné nové hrany už cyklus vznikne,
- (d) souvislý graf s počtem hran o jedna menším než je počet vrcholů.

Graf, jehož každá komponenta souvislosti je stromem, se nazývá *les*. *Kostrou* souvislého grafu G označujeme podgraf grafu G , který obsahuje všechny vrcholy G a který je zároveň stromem.

Příklad 1. *Kolik je všech stromů s vrcholy $\{1, 2, 3, 4\}$? Nakreslete všechny neizomorfní stromy na 6 vrcholech.*

Příklad 2. *Ukažte, že pro každý strom s n vrcholy existuje pořadí vrcholů $\{v_1, \dots, v_n\}$ takové, že pro každé $i > 1$ platí, že v_i má právě jednoho souseda v množině $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$.*

Příklad 3. *Ukažte, že graf na n vrcholech s k komponentami souvislosti je lesem právě tehdy, když má $n - k$ hran.*

Příklad 4. *Strom na 4152 vrcholech má pouze vrcholy stupně 1 a 3. Kolik minimálně a maximálně může mít listů?*

Příklad 5. *Spočtete kolik má různých koster má*

- (a) *cyklus na n vrcholech,*
- (b) *činka, neboli dva cykly délek m a n spojené cestou délky l ,*
- (c) *Θ -graf, tedy dva vrcholy stupně tři spojené cestami délek m , n a l ,*
- (d) *úplný bipartitní graf $K_{2,n}$.*

Příklad 6. *Dokažte, že graf $G = (V, E)$ je stromem právě tehdy, když neobsahuje kružnici a $|E| = |V| - 1$.*

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>