Algoritmická teorie her – příklady na 6. cvičení*

1 ε-Nashova a korelovaná ekvilibria

Nechť $G = (P, A, u)$ je hra v normálním tvaru pro n hráčů a mějme $\varepsilon > 0$. Strategický profil $s = (s_1, \ldots, s_n)$ je *ε-Nashovým ekvilibriem*, pokud pro každého hráče $i \in P$ a každou strategii $s'_i \in S_i$ máme $u_i(s_i; s_{-i}) \geq u_i(s'_i; s_{-i}) - \varepsilon$.

Nechť p je rozdělení pravděpodobnosti na A, neboli $p(a) \geq 0$ pro každé $a \in A$ a $\sum_{a \in A} p(a) = 1$. Rozdělení p je *korelovaným ekvilibriem* v G, pokud platí

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i; a_{-i}) p(a_i; a_{-i}) \geq \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a'_i; a_{-i}) p(a_i; a_{-i})$$

pro každého hráče $i \in P$ a všechny čisté strategie $a_i, a'_i \in A_i$.

Příklad 1. *Ukažte, že v každé hře $G = (P, A, u)$ v normálním tvaru pro n hráčů je každá konvexní kombinace korelovaných ekvilibrií opět korelovaným ekvilibriem.*

Příklad 2. *Ukažte, že v každé hře $G = (P, A, u)$ v normálním tvaru pro n hráčů pro každé Nashovo ekvilibrium existuje odpovídající korelované ekvilibrium.*

Příklad 3. *Nechť je $G = (P = \{1, 2\}, A, u)$ hra v normálním tvaru pro dva hráče, kde $A_1 = \{U, D\}$ a $A_2 = \{L, R\}$ s výplatní funkcí u určenou Tabulkou 1.*

	L	R
U	(1,1)	(0,0)
D	$(1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1)$	(500,500)

Tabulka 1: Hra z Příkladu 3.

Ukažte, že zde je ε-Nashovo ekvilibrium s takové, že $u_i(s') > 10u_i(s)$ pro každé $i \in P$ a každé Nashovo ekvilibrium s' v G. Jinak řečeno, existují hry, ve kterých jsou některá ε-Nashova ekvilibria daleko od všech Nashových ekvilibrií.

Příklad 4. *Spočítejte všechna korelovaná ekvilibria ve hře Vězňovo dilema.*

	T	S
T	(-2,-2)	(0,-3)
S	(-3,0)	(-1,-1)

Tabulka 2: Hra z příkladu 4.

Příklad 5. *Nechť je $G = (P = \{1, 2\}, A, u)$ hra v normálním tvaru pro dva hráče, kde $A_1 = \{U, D\}$ a $A_2 = \{L, R\}$ s výplatní funkcí u určenou Tabulkou 3.*

	L	R
U	(6,6)	(2,7)
D	(7,2)	(0,0)

Tabulka 3: Hra z Příkladu 5.

(a) *Spočítejte všechna Nashova ekvilibria v G a nakreslete konvexní obal výplat Nashových ekvilibrií.*

(b) *Existuje korelované ekvilibrium v G (pro nějaké rozdělení p), které dává výplatu mimo daný konvexní obal?*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko

Příklad 6 (Týdenní výzva)**.** *Mějme hru $G = (P, A, u)$ v normálním tvaru, pro kterou existuje hráč $i \in P$ s akcemi $a_i, a_i' \in A_i$, kde a_i je ostře dominovaná akcí a_i'. Rozhodněte a zdůvodněte, zda může existovat korelované ekvilibrium p splňující $p(a) > 0$ pro nějaké $a \in A$ obsahující a_i.*

(Jinými slovy: můžeme ztratit korelovaná akvilibria při hledání iterovaně dominovaných ekvilibrií?)