

Algoritmická teorie her – příklady na 4. cvičení*

1 Maticové hry

Maticová hra je hrou v normálním tvaru pro 2 hráče. Maticová hra je *nedegenerovaná*, pokud každý hráč má nanejvýš k nejlepších čistých odpovědí na každou strategii s doménou velikosti k . *Maticová hra s nulovým součtem* je hra, kde užitek jednoho hráče se vždy rovná ztrátě druhého. U maticové hry $G = (\{1, 2\}, A, u)$ s $A_1 = \{1, \dots, m\}$ a $A_2 = \{1, \dots, n\}$ používáme výplatní matice M a N , kde $(M)_{i,j} = u_1(i, j)$ a $(N)_{i,j} = u_2(i, j)$ pro všechna $i \in A_1$ a $j \in A_2$.

Na přednášce jsme si ukazovali následující algoritmus pro výpočet Nashových ekvilibrií nedegenerovaných maticových her.

Algorithm 1.1: SUPPORT ENUMERATION(G)

Vstup: Nedegenerovaná maticová hra G .

Výstup: Všechna Nashova ekvilibria hry G .

for každé $k \in \{1, \dots, \min\{m, n\}\}$ a dvojici domén (I, J) velikosti k
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Vyřešte systém rovností } \sum_{i \in I} (N^\top)_{j,i} x_i = v, \sum_{j \in J} (M)_{i,j} y_j = u, \\ \text{pro každé } i \in I, j \in J \text{ a } \sum_{i \in I} x_i = 1, \sum_{j \in J} y_j = 1. \\ \text{Pokud } x_i > 0 \text{ (} i \in I \text{), } y_j > 0 \text{ (} j \in J \text{) a } u = \max\{(M)_{i,j} : i \in A_1\}, \\ v = \max\{(N^\top)_{j,i} : j \in A_2\}, \text{ pak vraťte } (x, y) \text{ jako Nashovo ekvilibrium.} \end{array} \right.$

Příklad 1. Pomocí algoritmu enumerace Support enumeration najděte Nashovo ekvilibrium hry Manželský spor, v němž mají strategie obou hráčů doménu velikosti 2.

	Fotbal (1)	Opera (2)
Fotbal (1)	(2, 1)	(0, 0)
Opera (2)	(0, 0)	(1, 2)

Tabulka 1: Hra Manželský spor.

Příklad 2. Ukažte, že Hra o duši Gotham je degenerovaná. Použijte algoritmus Support enumeration z přednášky a nalezněte Nashovo ekvilibrium s doménami $I = \{2\}$ a $J = \{1, 2\}$.

	Spolupracovat (1)	Detonovat (2)
Spolupracovat (1)	(0, 0)	(0, 1)
Detonovat (2)	(1, 0)	(0, 0)

Tabulka 2: Hra o duši Gotham.

Příklad 3. Rozhodněte, které z těchto výplatních matic určují degenerované hry.

$$(a) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad a \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad a \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko>

Příklad 4. Dokažte, že následující lineární programy z důkazu Minimaxové věty jsou navzájem duální.

(a) Pro matici $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

	Program P	Program D
Proměnné	$y_1, \dots, y_n$	x_0
Účelová funkce	$\min x^\top M y$	$\max x_0$
Omezení	$\sum_{j=1}^n y_j = 1,$ $y_1, \dots, y_n \geq 0.$	$\mathbf{1} x_0 \leq M^\top x.$

(b) Pro matici $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

	Program P'	Program D'
Proměnné	$y_0, y_1, \dots, y_n$	$x_0, x_1, \dots, x_m$
Účelová funkce	$\min y_0$	$\max x_0$
Omezení	$\mathbf{1} y_0 - M y \geq \mathbf{0},$ $\sum_{j=1}^n y_j = 1,$ $y_1, \dots, y_n \geq 0.$	$\mathbf{1} x_0 - M^\top x \leq \mathbf{0},$ $\sum_{i=1}^m x_i = 1,$ $x_1, \dots, x_m \geq 0.$

Můžete použít kuchařku na vytváření duálních programů z přednášky.

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$	$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$	$A^\top \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Podmínky	i -tá podmínka má $\leq$	$y_i \geq 0$
	$\geq$	$y_i \leq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	j -tá podmínka má $\geq$
	$x_j \leq 0$	$\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

Příklad 5 (Týdenní výzva). Dokažte, že je-li maticová hra nedegenerovaná, pak systém rovností z algoritmu Support enumeration má nejvýš jedno řešení splňující $x_i > 0$ ($i \in I$), $y_j > 0$ ($j \in J$), $u = \max\{(M)_{iy} : i \in A_1\}$ a $v = \max\{(N^\top)_{jx} : j \in A_2\}$.

Nápověda: Ukažte, že existuje-li více řešení, tak pak lze zredukovat doménu.