

Algoritmická teorie her – příklady na 11. cvičení*

1 Myersonovo lemma

Alokační pravidlo x je *implementovatelné*, pokud existuje platební pravidlo p takové, že mechanismus (x, p) je DSIC. Alokační pravidlo x je *monotónní*, pokud pro každého nabízejícího i a libovolné nabídky b_{-i} ostatních je alokace $x_i(z; b_{-i})$ nabízejícího i neklesající v jeho nabídce z .

Věta 1 (Myersonovo lemma). *V jednoparametrových prostředích platí následující tři tvrzení.*

- (a) *Alokační pravidlo je implementovatelné právě tehdy, když je monotónní.*
- (b) *Je-li alokační pravidlo x monotónní, pak existuje jediné platební pravidlo p takové, že mechanismus (x, p) je DSIC (za předpokladu, že $b_i = 0$ implikuje $p_i(b) = 0$).*
- (c) *Platební pravidlo p je určeno následujícím vzorcem*

$$p_i(b_i; b_{-i}) = \int_0^{b_i} z \cdot \frac{d}{dz} x_i(z; b_{-i}) dz$$

pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

Je-li funkce $x_i(z; b_{-i})$ po částech konstantní s body zlomu z_1, \dots, z_ℓ , pak vzoreček pro platby dává

$$p_i(b_i; b_{-i}) = \sum_{j=1}^{\ell} z_j \cdot \text{jump}(x_i(\cdot; b_{-i}), z_j),$$

kde $\text{jump}(x_i(\cdot; b_{-i}), z_j)$ je velikost skoku funkce $x_i(\cdot; b_{-i})$ v bodě zlomu z_j .

Příklad 1. *Použitím Myersonova lemma dokažte, že Vickreyho aukce je jedinou jednopoložkovou aukcí, která je DSIC a která vždy vybere kupujícího s nejvyšší valuačí zatímco ostatním kupujícím naučtuje 0.*

Příklad 2. *Máme veřejný projekt, jehož výstavba je zvažována n agenty, kde každý agent i má valuaci $v_i \geq 0$ udávající jak moc chce, aby byl projekt postaven. Je-li projekt postaven, tak každý agent jej může využívat, ale k tomu je potřeba, aby celkový zájem o projekt byl aspoň C ; není-li postaven, tak jej nemůže využívat nikdo a celkový sociální zisk je 0.*

Zformulujte tento problém jako 1-parametrové prostředí a použijte Myersonovo lemma k navržení DSIC mechanismu pro příslušnou aukci.

Příklad 3. *Bud' $G = (V, E)$ graf s hranami ohodnocenými funkcí w , která jim přiřazuje záporné hodnoty. Cílem je najít minimální kostru v G .*

Zformulujte tento problém jako 1-parametrové prostředí a použijte Myersonovo lemma k navržení DSIC mechanismu pro příslušnou aukci.

Motivace: máme n měst, kde chceme opravit silnice mezi městy tak, aby se z každého města dalo dostat do každého jen po opravených úsecích. Každý úsek silnic mezi dvěma městy má ale na starost jedna společnost, která má o danou zakázku oprav nějaký zájem. Chceme zakázky přiřadit tak, aby celková spokojenost společností byla maximální a přitom počet opravených úseků byl minimální. Cílem je ukázat, že pro tento problém je možné navrhnout aukci, kde každá společnost má jasnou strategii nabízení.

Příklad 4. *Navrhněte DSIC mechanismus maximalizující sociální zisk v 1-parametrovém prostředí s množinou přípustných řešení $X = \{(\log y_1, \dots, \log y_n) : y_1, \dots, y_n > 0, \sum_{i=1}^n y_i = 1\}$. Použijte alokační pravidlo, kde $y_i = b_i / \sum_{j=1}^n b_j$. Můžete předpokládat, že všechny valuace jsou kladné.*

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>