Algoritmická teorie her — 2. domácí úkol[1]
Nashova ekvilibria

zadáno 31.10.2019, termín odevzdání 14.11.2019

Pokud chcete vidět své body na stránkách cvičení, tak si, prosím, zvolte přezdívku a napište ji spolu se svým jménem na svoje řešení či mi ji pošlete e-mailem.

Příklad 1. *Dokažte, že následující lineární programy z důkazu Minimaxové věty jsou navzájem duální.*

(a) *Pro matici* $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$, **[2]**

	Program P	Program D
Proměnné	$y_1, \dots, y_n$	x_0
Účelová funkce	$\min x^\top My$	$\max x_0$
Omezení	$\sum_{j=1}^n y_j = 1,$	$\mathbf{1}x_0 \le M^\top x.$
	$y_1, \dots, y_n \ge 0.$	

(b) *Pro matici* $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$, **[2]**

	Program P'	Program D'
Proměnné	$y_0, y_1, \dots, y_n$	$x_0, x_1, \dots, x_m$
Účelová funkce	$\min y_0$	$\max x_0$
Omezení	$\mathbf{1}y_0 - My \ge \mathbf{0},$	$\mathbf{1}x_0 - M^\top x \le \mathbf{0},$
	$\sum_{j=1}^n y_j = 1,$	$\sum_{i=1}^m x_i = 1,$
	$y_1, \dots, y_n \ge 0.$	$x_1, \dots, x_m \ge 0.$

Můžete použít kuchařku na vytváření duálních programů z přednášky.

Příklad 2. *Použijte Lemkeho–Howsonův algoritmus a spočítejte Nashovo ekvilibrium následující hry dvou hráčů:* **[2]**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{and} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3. \end{pmatrix}$$

Výpočet začněte výběrem značky 1.

Příklad 3. *[Spernerovo lemma] Nechť S je podrozdělení trojúhelníku T v rovině.* Korektní obarvení *vrcholů S přiřazuje jednu ze tří barev (modrá, červená a zelená) každému vrcholu z S tak, že všechny tři barvy jsou použité na vrcholech z T. Navíc každý vrchol z S ležící na hraně z T musí mít jednu z barev, kterou má nějaký vrchol této hrany ležící v T.*

Dokažte, že v každém korektním obarvení S existuje trojúhelníková stěna v S jejíž vrcholy jsou obarveny všemi třemi barvami.

Hint: Použijte redukci na problém END-OF-THE-LINE. **[3]**

[1] Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/