

Algoritmická teorie her – příklady na 6. cvičení*

2. ledna 2020

1 Bulowova–Klempererova věta a více-parametrický mechanism design

Věta 1 (The Bulow–Klemperer Theorem). *Nechť jsou $F = F_1 = \dots = F_n$ regulární rozdělení pravděpodobnosti a buď n přirozené číslo. Potom platí následující nerovnost*

$$\mathbb{E}_{v_1, \dots, v_{n+1} \sim F} [\text{Rev}(VA_{n+1})] \geq \mathbb{E}_{v_1, \dots, v_n \sim F} [\text{Rev}(OPT_{F,n})], \quad (1)$$

kde $\text{Rev}(VA_{n+1})$ označuje zisk Vickreyho aukce VA_{n+1} s $n+1$ kupujícími (a žádnou rezervou) a $\text{Rev}(OPT_{F,n})$ značí zisk optimální aukce $OPT_{F,n}$ při F s n kupujícími.

Více-parametrický mechanism design označuje následující nastavení:

- (a) n racionálních účastníků (neboli kupujících),
- (b) konečná množina Ω výstupů,
- (c) každý kupující i má soukromé ohodnocení $v_i(\omega) \geq 0$ pro každý výstup $\omega \in \Omega$.

Každý kupující i odešle svou nabídku $b_i(\omega)$ pro každé $\omega \in \Omega$ a a nším cílem je navrhnout mechanismus, který zvolí výstup $\omega \in \Omega$ maximalizující sociální přebytek $\sum_{i=1}^n v_i(\omega)$.

Věta 2 (Vickrey–Clarke–Groves (VCG) mechanismus). *V každém více-parametrickém mechanismu existuje DSIC mechanismus maximalizující sociální přebytek.*

Příklad 1. *Dokažte, že platební pravidlo z důkazu VCG mechanismu je vždy nezáporné a shora omezené hodnotou $b_i(\omega^*)$. Neboli ukažte, že $0 \leq p_i(b) \leq b_i(\omega^*)$ pro každý vektor b nabídek, kde*

$$p_i(b) = \max_{\omega \in \Omega} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_j(\omega) \right\} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_j(\omega^*)$$

a

$$\omega^* = \operatorname{argmax}_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^n b_i(\omega).$$

Příklad 2. *Uvažte 3-položkovou aukci se dvěma kupujícími 1 and 2. Tři položky A , B a C jsou draženy najednou a každý kupující může dát nabídku na libovolnou podmnožinu položek. Ohodnocení kupujících pro jednotlivé podmnožiny položek jsou uvedeny v Tabulce 1. Jaký je výstup VCG aukce?*

bidder i	$v_i(\emptyset)$	$v_i(A)$	$v_i(B)$	$v_i(C)$	$v_i(AB)$	$v_i(AC)$	$v_i(BC)$	$v_i(ABC)$
$i = 1$	0	24	4	9	29	38	20	50
$i = 2$	0	15	18	11	30	34	32	47

Tabulka 1: Ohodnocení kupujících z Příkladu 2.

Neboli kteří kupující získají které položky a kolik každý zaplatí?

Příklad 3. *Uvažte 1-položkovou aukci s $n \geq 2$ kupujícími, kteří svá ohodnocení volí podle regulárního rozdělení pravděpodobnosti F . Dokažte, že střední hodnota zisku Vickreyho aukce bez rezervy je aspoň $\frac{n-1}{n}$ -zlomek střední hodnoty zisku optimální aukce se stejným počtem n kupujících.*

Nápověda: použijte Bulowovu–Klempererovu větu. Když přidáme jednoho kupujícího, o kolik může maximální střední hodnota zisku vzrůst?

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>