

# Algoritmická teorie her – příklady na 3. cvičení\*

14. listopadu 2019

## 1 $\varepsilon$ -Nashova a korelovaná ekvilibria

Nechť  $G = (P, A, u)$  je hra v normálním tvaru pro  $n$  hráčů a mějme  $\varepsilon > 0$ . Strategický profil  $s = (s_1, \dots, s_n)$  je  $\varepsilon$ -Nashovým ekvilibriem, pokud pro každého hráče  $i \in P$  a každou strategii  $s'_i \in S_i$  máme  $u_i(s_i; s_{-i}) \geq u_i(s'_i; s_{-i}) - \varepsilon$ .

Nechť  $p$  je rozdělení pravděpodobnosti na  $A$ , neboli  $p(a) \geq 0$  pro každé  $a \in A$  a  $\sum_{a \in A} p(a) = 1$ . Rozdělení  $p$  je korelovaným ekvilibriem v  $G$ , pokud platí

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i; a_{-i})p(a_i; a_{-i}) \geq \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a'_i; a_{-i})p(a_i; a_{-i})$$

pro každého hráče  $i \in P$  a všechny čisté strategie  $a_i, a'_i \in A_i$ .

**Příklad 1.** Ukažte, že v každé hře  $G = (P, A, u)$  v normálním tvaru pro  $n$  hráčů pro každé Nashovo ekvilibrium existuje odpovídající korelované ekvilibrium. Neboli ukažte, že je-li  $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$  Nashovým ekvibiem v  $G$ , tak potom rozdělení  $p_{s^*}$  dané součinem

$$p_{s^*}(a) = \prod_{j=1}^n s_j^*(a_j),$$

pro každé  $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$  je korelovaným ekvibiem v  $G$ .

**Příklad 2.** Ukažte, že v každé hře  $G = (P, A, u)$  v normálním tvaru pro  $n$  hráčů je každá konvexní kombinace korelovaných ekvibiů opět korelovaným ekvibiem.

**Příklad 3.** Nechť je  $G = (P = \{1, 2\}, A, u)$  hra v normálním tvaru pro dva hráče, kde  $A_1 = \{U, D\}$  a  $A_2 = \{L, R\}$  s výplatní funkcí  $u$  určenou Tabulkou 1.

|   | L                                | R         |
|---|----------------------------------|-----------|
| U | (1,1)                            | (0,0)     |
| D | $(1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1)$ | (500,500) |

Tabulka 1: Hra z Příkladu 3.

Ukažte, že zde je  $\varepsilon$ -Nashovo ekvilibrium s takové, že  $u_i(s') > 10u_i(s)$  pro každé  $i \in P$  a každé Nashovo ekvilibrium  $s'$  v  $G$ . Jinak řečeno, existují hry, ve kterých jsou některá  $\varepsilon$ -Nashova ekvilibria daleko od všech Nashových ekvibiů.

**Příklad 4.** Nechť je  $G = (P = \{1, 2\}, A, u)$  hra v normálním tvaru pro dva hráče, kde  $A_1 = \{U, D\}$  a  $A_2 = \{L, R\}$  s výplatní funkcí  $u$  určenou Tabulkou 2.

|   | L     | R     |
|---|-------|-------|
| U | (6,6) | (2,7) |
| D | (7,2) | (0,0) |

Tabulka 2: Hra z Příkladu 4.

- Spočítejte všechna Nashova ekvilibria v  $G$  a nakreslete konvexní obal výplat Nashových ekvibiů.
- Existuje korelované ekvilibrium v  $G$  (pro nějaké rozdělení  $p$ ), které dává výplatu mimo daný konvexní obal?

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>