Algoritmická teorie her – příklady na 1. cvičení*

10. října 2019

1 Nashova ekvilibria

Hra v normálním tvaru je trojicí (P, A, u), kde P je množina n *hráčů*, $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ je množina *profilů akcí*, kde A_i označuje množinu *akcí* hráče i, a $u = (u_1, \ldots, u_n)$ je n-ticí, ve které každé $u_i \colon A \to \mathbb{R}$ je *užitkovou funkcí* hráče i.

Množina *čistých strategií* hráče i je množinou A_i akcí hráče i. Množina S_i *smíšených strategií* hráče i je množinou pravděpodobnostních rozdělení na A_i. *Střední hodnotou užitkové funkce* hráče i na smíšeném strategickém profilu $s = (s_1, \ldots, s_n)$ je

$$u_i(s) = \sum_{a=(a_1,\ldots,a_n)\in A} u_i(a) \prod_{j=1}^{n} s_j(a_j).$$

Použijeme značení $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ a, pro strategii $s'_i \in S_i$ hráče i, použijeme $u_i(s'_i; s_{-i})$ k označení čísla $u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Nejlepší odpovědí hráče i na strategický profil s_{-i} je smíšená strategie s^*_i taková, že $u_i(s^*_i; s_{-i}) \geq u_i(s'_i; s_{-i})$ pro každou strategii $s'_i \in S_i$. *Nashovým ekvilibriem* v G je strategický profil $(s_1, \ldots, s_n)$ takový, že s_i je nejlepší odpovědí hráče i na s_{-i} pro každé $i \in P$.

Příklad 1. *Ověřte, že střední hodnota užitkové funkce ve hře $G = (P, A, u)$ v normálním tvaru pro n hráčů je lineární. Neboli dokažte, že $u_i(s) = \sum_{a_i \in A_i} s_i(a_i) u_i(a_i; s_{-i})$ pro každého hráče $i \in P$ a každý smíšený strategický profil $s = (s_1, \ldots, s_n)$.*

Příklad 2. *Spočítejte Nashova ekvilibria v následujících hrách:*

(a) *Vězňovo dilema,*

(b) *Kámen-nůžky-papír.*

Formálně dokažte, že žádná jiná ekvilibria v těchto hrách neexistují.

Příklad 3 (Iterovaně dominovaná ekvilibria)**.** *Nechť $G = (P, A, u)$ je hra v normálním tvaru pro n hráčů. Pro každého hráče i řekneme, že strategie $s_i \in S_i$ je* ostře dominovaná *strategií $s'_i \in S_i$, pokud pro každé $s_{-i} \in S_{-i}$ máme $u_i(s_i; s_{-i}) < u_i(s'_i; s_{-i})$. Uvažte následující iterovaný proces, který nám v některých hrách pomůže najít Nashovo ekvilibrium.*

Nastavme $A^0_i = A_i$ a $S^0_i = S_i$ pro každého hráče $i \in P$. Pro $t \geq 1$ and $i \in P$ buď A^t_i množina čistých strategií z A^{t-1}_i, které nejsou ostře dominovány strategií z S^{t-1}_i a buď S^t_i množina smíšených strategií, které mají support obsažený v A^t_i. Nechť T je prvním krokem, ve kterém se množiny A^T_i a S^T_i již nezmenšují pro žádného hráče $i \in P$. Má-li poté každý hráč $i \in P$ pouze jednu strategii $a_i \in A^T_i$, tak řekneme, že $a_1 \times \cdots \times a_n$ je iterovaně dominované ekvilibrium *hry G.*

(a) *Ukažte, že iterovaně dominované ekvilibrium je Nashovým ekvilibriem.*

(b) *Nalezněte příklad hry, která má Nashovo ekvilibrium, které není iterovaně dominovaným ekvilibriem.*

Příklad 4. *Použijte metodu z Příkladu 3 k nalezení unikátního Nashova ekvilibria v následující hře dvou hráčů (viz Tabulka 1) zredukováním této hry na hru 2×2.*

Příklad 5. *Uvažte následující hru pro $n \geq 2$ hráčů. Každý hráč vybere číslo z $\{1, \ldots, 1000\}$ nezávisle na ostatních. Cílem každého hráče je vybrat si číslo, které je co nejblíže polovině z průměru všech vybraných čísel.*

Definujeme dvě varianty této hry v závislosti na pravidlu, jak vyřešit remízy. V první variantě si všichni hráči, kteří jsou nejblíže k polovině průměru, mezi sebou rovnoměrně rozdělí výplatu 1. Ve druhé variantě každý z těch hráčů, kteří jsou nejblíže k polovině průměru, dostane výplatu 1.

Jak byste takovou hru hráli? Nalezněte všechna čistá Nashova ekvilibria pro

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

	c_1	c_2	c_3	c_4
r_1	(5, 2)	(22, 4)	(4, 9)	(7, 6)
r_2	(16, 4)	(18, 5)	(1, 10)	(10, 2)
r_3	(15, 12)	(16, 9)	(18, 10)	(11, 3)
r_4	(9, 15)	(23, 9)	(11, 5)	(5, 13)

Tabulka 1: A game from Exercise 4.

*(*a*)* *první variantu této hry,*

*(*b*)* *druhou variantu této hry.*