

Řešení vzorové písemky

1. (a) Permutace je bijektivní zobrazení (t.j. prosté a na) z množiny do sebe samé.

- $a \rightarrow -a$ je permutace, protože je prosté: $-b = -c \Rightarrow b = c$, a je na: na každé $c \in \mathbb{Z}$ se zobrazí prvek $-c \in \mathbb{Z}$
- $a \rightarrow a + 1$ je permutace, protože je prosté: $b + 1 = c + 1 \Rightarrow b = c$, a je na: na každé $c \in \mathbb{Z}$ se zobrazí prvek $c - 1 \in \mathbb{Z}$
- $a \rightarrow 5a$ není permutace, protože není na, pokrývá jen násobky pěti, např. číslo 1 nemá vzor v tomto zobrazení

1. (b) Strom je souvislý graf bez cyklů. $\Leftrightarrow$ Strom na n vrcholech je souvislý graf s $n - 1$ hranami.

Indukovaný podgraf stromu nemusí být vždy strom, nemusí být totiž souvislý. Například podgraf cesty délky dvě na vrcholech a, b, c indukovaný vrcholy a, c není souvislý.

1. (c) Souvislý graf je takový, v němž každé dva vrcholy spojuje cesta. Doplněk nesouvislého grafu je vždy souvislý.

Důkaz: Je-li G nesouvislý, potom má alespoň dvě komponenty $A_1, A_2, \dots, A_k$, $k \geq 2$. V doplňku jsou každé dva různé vrcholy $u \in A_i, v \in A_j$ spojeny

- hranou, leží-li v různých komponentách, t.j. $i \neq j$, nebo
- přinejmenším cestou délky dvě $u - w - v$, leží-li ve stejné komponentě, t.j. $i = j$, kde vrchol w lze zvolit z libovolné komponenty $A_t, t \neq i$.

2. Znění věty: *Vzestupně uspořádaná posloupnost nezáporných celých čísel $(d_1, \dots, d_n)$ je skóre grafu tehdy a jenom tehdy, když posloupnost $(d_1, \dots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, \dots, d_{n-1} - 1)$ je skóre grafu.*

Důkaz: " $\Leftarrow$ " Má-li graf G' skóre $(d'_1, \dots, d'_{n-1}) = (d_1, \dots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, \dots, d_{n-1} - 1)$, kde $d'_i = \deg(v_i)$, potom lze sestrojit graf G se skóre $(d_1, \dots, d_n)$, přidáním vrcholu v_n , jenž bude spojen hranou s vrcholy $v_{n-d_n}, \dots, v_{n-1}$.

" $\Rightarrow$ " Nechť graf G na vrcholech $v_1, \dots, v_n$ má skóre $(d_1, \dots, d_n)$, kde $d_i = \deg(v_i)$. Pokud je vrchol v_n spojen hranou s vrcholy $v_{n-d_n}, \dots, v_{n-1}$, dostaneme odstraněním vrcholu v_n hledaný graf se skóre $(d_1, \dots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, \dots, d_{n-1} - 1)$.

V opačném případě ukážeme, že lze sestrojit G' se stejným skóre jako G , s uvedenou vlastností (t.j. v_n sousedí s $v_{n-d_n}, \dots, v_{n-1}$). Postupujeme indukci podle indexu nejzazšího vrcholu v_k , který není spojen s v_n . Nechť v_l je soused v_n s nejnižším indexem. Protože $l < k$, platí $\deg(v_l) \leq \deg(v_k)$, navíc $(v_l, v_n) \in E_G$ a $(v_k, v_n) \notin E_G$, čili musí existovat vrchol v_i ($i \neq l, k, n$), takový že $(v_i, v_l) \notin E_G$ a $(v_i, v_k) \in E_G$. Odebráním hran $(v_i, v_k), (v_l, v_n)$ a přidáním $(v_k, v_n), (v_i, v_l)$ dostaneme graf se stejným skóre, v němž nejzazší vrchol nespojený s v_n má index nižší než k . Postupným snižováním k na $n - d_n - 1$ získáme hledaný G' .

3. Každá permutace na $\{1, \dots, n\}$ s právě jedním pevným bodem je jednoznačně určena pevným bodem x a permutací na $n-1$ prvkové množině $\{1, \dots, x-1, x+1, \dots, n\}$ bez pevného bodu.

Volbu x lze provést n způsoby, a doplnit $\mathfrak{s}(n-1)$ různými permutacemi, t.j.

$$\begin{aligned} \# \text{permutací s právě jedním pevným bodem} &= \\ &= n \cdot (n-1)! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right] \end{aligned}$$

4. Grafy, které neobsahují cestu délky tři jsou tvořeny disjunktním sjednocením grafů C_3 , K_1 a $K_{1,k}$ pro $k \geq 1$, t.j. disjunktním sjednocením trojúhelníků, izolovaných vrcholů, izolovaných hran a hvězd.

Důkaz: tyto grafy evidentně neobsahují cestu délky tři.

Nechť H je komponenta grafu bez cesty délky tři. Pokud $|V_H| < 4$, máme $H = K_1, K_{1,1}, K_{1,2}$ nebo C_3 . Pokud $|V_H| \geq 4$, potom obsahuje vrchol b stupně alespoň dva. Označme a, c dva různé sousedy b .

Pokud by H obsahoval ještě nějaký další vrchol d , jenž by nebyl spojen s b , potom vezmeme nejkratší cestu v H z vrcholu d do b . Tato cesta má délku alespoň dva a nemůže obsahovat zároveň oba vrcholy a, c . Proto ji lze prodloužit na cestu délky alespoň tři o jeden z chybějících vrcholů a nebo c .

Odvodili jsme, že v H jsou všechny vrcholy spojeny s b . Navíc v H žádné dva vrcholy $e, f \neq b$ nemůžou být spojeny hranou, protože pro libovolné $g \in V_H \setminus \{b, e, f\}$ by H obsahoval cestu $e - f - b - g$.

Tudíž $H = K_{1,k}, k = |V_H| - 1$.

Poznámka pod čarou: Při písence můžete ilustrovat na obrázcích mnohá fakta, která se formálně popisují těžce, proto je neváhejte používat.