# Topologické metody v kombinatorice - 5. série

**Nápověda: 3. 1. 2008**
**Řešení: 10. 1. 2008**

## $\mathbb{Z}_2$-akce a $\mathbb{Z}_2$-index

1. Nechť $\mathsf{K}$ je abstraktní simpliciální komplex – hranice $(n-1)$-rozměrného simplexu. Tj. $\mathsf{K} = 2^{[n]} \setminus \{[n]\}$ a nechť $\mathsf{L}$ je první barycentrické podrozdělení $\mathsf{K}$ (množina vrcholů $\mathsf{L}$ je tvořena všemi vlastními neprázdnými podmnožinami $[n]$). Nechť $\nu \colon V(\mathsf{L}) \to V(\mathsf{L})$ je simpliciální zobrazení definované pro $F \in V(\mathsf{L})$ jako $\nu(F) = [n] \setminus F$. Pořádně dokažte, že $(\|L\|, \|\nu\|)$ je volný $\mathbb{Z}_2$-prostor. (**2 body**)
2. Nechť $\mathsf{K}$ je simpliciální komplex a $\nu$ je volná simpliciální $\mathbb{Z}_2$-akce[1] na $\mathsf{K}$. Dokažte, že pro každou $F \in \mathsf{K}$ platí $F \cap \nu(F) = \emptyset$. (**3 body**)
3. Uveďte příklad volného $\mathbb{Z}_2$-prostoru $X$ takového, že $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) = \infty$. (**2 body**)
4. Nechť $(X, \nu)$ je metrický volný $\mathbb{Z}_2$-prostor[2]. Dokažte, že $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) \geq n$, právě když pro každé pokrytí $X$ uzavřenými množinami $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ existují $x \in X$ a $i \in [n+1]$ taková, že $\{x, \nu(x)\} \subseteq F_i$. (**6 bodů**)

## $k$-souvislost

5.
   (a) Nechť $X$ je prostor, který není $k$-souvislý. Dokažte, že $X \times Y$ není $k$-souvislý pro žádné $Y$.
   (b) Předpokládejme, že prostory $X$ a $Y$ jsou $k$-souvislé. Dokažte, že i $X \times Y$ je $k$-souvislý.
   (**3 body**)
6. Nechť $X$ a $Y$ jsou homotopicky ekvivalentní prostory. Dokažte, že pokud je prostor $X$ $k$-souvislý, potom je $k$ souvislý i $Y$. (**2 body**)

---

[1] Formálně, $\nu$ je simpliciální a $\|\nu\|$ je $\mathbb{Z}_2$-akce.
[2] Symbolem $\nu$ myslíme $\mathbb{Z}_2$-akci a nikoliv metriku na $X$.