

## 9. série

(4. prosince 2008)

**1. úloha** Dokažte, že existuje spojitá funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že  $f + g$  není rostoucí pro žádnou diferencovatelnou funkci  $g$ .

**2. úloha** Na večírku se sešlo  $n$  manželských párů. Jeden z přítomných byl sociolog a tak se rozhodl udělat malý průzkum. Na konci večírku se každého přítomného (samozřejmě kromě sebe) zeptal, s kolika lidmi si během večírku potřásl rukou. Dostal  $2n - 1$  různých odpovědí. Navíc víme, že nikdo z přítomných si nepotřásl rukou s vlastní manželkou. S kolika lidmi si potřásla rukou manželka sociologa?

**3. úloha** Nechť  $ABCDEFGHIJKL$  je pravidelný dvanáctiúhelník v rovině. Dokažte, že úhlopříčky  $AI$ ,  $BK$  a  $DL$  se protínají ve společném bodě. Dokažte, že úhlopříčky  $AH$ ,  $BJ$ ,  $CK$  a  $EL$  se protínají ve společném bodě.

**4. úloha** Tři různé body s celočíselnými souřadnicemi leží v rovině na kružnici o poloměru  $r > 0$ . Dokažte, že alespoň dva z nich mají vzdálenost větší než  $r^{\frac{1}{3}}$ .

**5. úloha** Nechť  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  splňuje pro každé  $n \in \mathbb{N}$  vztah  $f(f(n)) = 2f(n) - n$ . Označme  $M = \{f(n) - n, n \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\}$ . Dokažte, že je-li  $M$  neprázdná, pak

$$0 < \sum_{m \in M} \frac{1}{m} \leq 1.$$

**6. úloha** Nechť  $\mathcal{H}$  je  $n$ -uniformní hypergraf, který má méně než  $\frac{k^{n-1}}{(k-1)^n}$  vrcholů. Dokažte, že jeho vrcholy lze obarvit  $k$  barvami tak, že každá hrana obsahuje vrcholy všech barev ( $n$ -uniformním hypergrafem  $\mathcal{H}$  rozumíme systém množin takový, že každá množina  $A \in \mathcal{H}$  má právě  $n$  prvků, množiny  $A$  jsou hrany hypergrafu, jejich prvky se nazývají vrcholy).