8. série

(27. listopadu 2008)

1. úloha Dvě 999-místná čísla a a b se liší pouze tak, že cifry čísla a jsou permutací cifer čísla b. Rozhodněte, zda jejich součet může být $999 \cdots 9$.

2. úloha Konvexní mnohoúhelník $K = A_1A_2 \ldots A_n$ v rovině nazveme balancovaný, pokud existuje jeho vnitřní bod P takový, že průsečíky B_i polopřímek A_iP s obvodem mnohoúhelníku K leží každý uvnitř jiné stěny K.

(a) Dokažte, že žádný konvexní mnohoúhelník K se sudým počtem stran není balancovaný.

(b) Rozhodněte, zda každý konvexní mnohoúhelník K s lichým počtem stran je balancovaný.

3. úloha Nechť k je přirozené číslo a $a_n = \binom{2n}{n} \mod k$. Pro která k je posloupnost (a_n) periodická? (S případnou předperiodou.)

4. úloha Nechť V je konečně dimenzionální vektorový prostor nad komutativním tělesem charakteristiky různé od 2. Nechť E_1, E_2 jsou dva podprostory prostoru endomorfismů $\mathrm{End}(V)$ takové, že $E_1 + E_2 = \mathrm{End}(V)$ a $\psi\phi + \phi\psi = 0$ pro každé $\psi \in E_1$ a $\phi \in E_2$. Dokažte, že buď $E_1 = 0$ nebo $E_2 = 0$.

5. úloha Nechť (x_i) je posloupnost kladných reálných čísel taková, že

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \infty.$$

Dokažte, že existuje množina $Z \subseteq \mathbb{N}$ hustoty nula taková, že

$$\sum_{z \in Z} x_z = \infty.$$

Množina $Z \subseteq \mathbb{N}$ má hustotu nula, pokud platí $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |Z \cap \{1, 2, \ldots, n\}| = 0$.

6. úloha Nechť D je uzavřená konvexní množina v rovině a f je omezená konvexní funkce (a tedy i spojitá) definovaná na vnitřku D.

(a) Je-li D konvexní mnohoúhelník, dokažte, že f lze spojitě rozšířit na celé D.

(b) Rozhodněte, jestli f lze vždy spojitě rozšířit na celé D, pokud je D jednotkový kruh.