4. série

(30. října 2008)

1. úloha Vyřešte v celých číslech soustavu rovnic

$$x^2 + a^2 = (x+1)^2 + b^2 = (x+2)^2 + c^2 = (x+3)^2 + d^2.$$

2. úloha Nechť $C \subset \mathbb{R}^n$ je jednotková n-rozměrná krychle, jejíž stěny jsou rovnoběžné se souřadnicovými nadrovinami $\{x_i = 0\}$. Předpokládejme navíc, že C obsahuje počátek jako vnitřní bod. Souřadnicové nadroviny dělí C na 2^n částí. Dokažte, že alespoň 2^{n-1} z těchto částí má objem nejvýše 2^{-n}.

3. úloha Nechť n je přirozené číslo. Najděte nejmenší přirozené číslo $k(n)$ s následující vlastností. Předpokládejme, že máme balíček s n kartami a mícháme ho tak, že balíček rozdělíme na dvě hromádky (můžou být různě velké), které pak slijeme dohromady (když z výsledné hromádky odeberme všechny karty z první (resp. druhé) hromádky, dostaneme karty druhé (resp. první) hromádky ve stejném pořadí jako před slitím). Nechť p je n-prvková permutace. Potom tuto permutaci p jsme schopni vytvořit po nejvýše $k(n)$ míchání.

4. úloha Buď M komplexní čtvercová matice, $\det M = 1$. Jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} M^n$, pak M je jednotková matice. Dokažte.

5. úloha Rozhodněte, zda existuje bijekce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, která zobrazí každý uzavřený kruh na uzavřený čtverec.

6. úloha Nechť R je komutativní k-prvkový konečný okruh s jedničkou. Prvek p nazveme *modrý*, pokud je různý od nuly a nedělí jedničku (tj. neexistuje $r \in R$ takové, že $pr = 1$). Dokažte, že množina modrých prvků je buď prázdná, nebo má velikost alespoň $\lfloor \sqrt{k-1} \rfloor$.