2. série

(16. října 2008)

1. úloha Řešte v $\mathbb{R}$:

$$\sqrt[5]{x^3 - 2x} = \sqrt[3]{x^5 - 2x}.$$

2. úloha Nechť a, b, c jsou celá čísla taková, že i $\frac{bc}{b+c}$, $\frac{ca}{a+c}$, $\frac{ab}{b+a}$ jsou celá čísla. Dokažte, že čísla a, b, c mají společného dělitele většího než 1.

3. úloha Graf je souvislý, pokud mezi každými jeho dvěma vrcholy existuje cesta. Graf je k-regulární, pokud stupně všech jeho vrcholů jsou rovny k. Graf G je hamiltonovský, pokud jako podgraf obsahuje kružnici, která prochází všemi jeho vrcholy. V závislosti na $k \geq 2$ rozhodněte, zda je každý k-regulární souvislý graf hamiltonovský.

4. úloha Buď $\mathcal{S}$ systém sfér v $\mathbb{R}^3$ takový, že každé dvě sféry $S_1, S_2 \in \mathcal{S}, S_1 \neq S_2$ mají společný nejvýše jeden bod. Dokažte, že množina všech takových společných bodů $X = \{x \in \mathbb{R}; \exists S_1, S_2 \in \mathcal{S}, S_1 \neq S_2, x \in S_1 \cap S_2\}$ je nejvýše spočetná.

5. úloha Rozhodněte, zda existuje posloupnost f_n spojitých reálných funkcí na $\mathbb{R}$ takových, že f_n konvergují k nulové funkci bodově, ale nekonvergují stejnoměrně na žádném otevřeném intervalu.

6. úloha Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou takový, že všechny jednobodové množiny jsou měřitelné. Nechť $f(x) = \mu(\{x\})$. Je f měřitelná?