15. série = 13. série

(12. března 2009)

1. úloha Nechť T a U jsou dvě disjunktní podmnožiny reálných čísel takové, že $T \cup U$ je uzavřená na násobení. Dále nechť pro každé tři prvky $t_1, t_2, t_3 \in T$ a pro každé tři prvky $u_1, u_2, u_3 \in U$ platí, že $t_1 t_2 t_3 \in T$ a $u_1 u_2 u_3 \in U$. Dokažte, že alespoň jedna z množin T a U je uzavřená na násobení.

2. úloha Rozhodněte, pro která $a, b \in \mathbb{R}^+$ konverguje integrál

$$\int_b^\infty \left(\sqrt{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-b}} \right) \mathrm{d}x.$$

3. úloha Pro každé n^2-ciferné přirozené číslo k označme $A(k)$ matici $n \times n$, která vznikne tak, že číslice čísla k napíšeme postupně do řádků. Např. pro 1234 dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pro každé n přirozené určete hodnotu výrazu $\sum_k \det A(k)$, kde k probíhá všechna n^2-ciferná čísla.

4. úloha Nechť je v rovině dáno konečně mnoho úseček, jejichž součet délek je méně než $\sqrt{2}$. Dokažte, že do roviny lze umístit nekonečnou jednotkovou čtvercovou síť, která neprotíná žádnou z daných úseček.

5. úloha Nechť $f_1, \dots f_n$ jsou diferencovatelné funkce proměnné x splňující

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} &= a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \ldots + a_{1n}f_n, \\ \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} &= a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \ldots + a_{2n}f_n, \\ &\vdots \\ \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x} &= a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \ldots + a_{nn}f_n, \end{aligned}$$

pro nějaké kladné konstanty a_{ij}. Pokud pro každé i platí, že $\lim_{x \to \infty} f_i(x) = 0$, musejí být funkce $f_1, f_2, \dots f_n$ lineárně závislé?

6. úloha Nechť $\{a_{ijk}\}_{i,j,k=1}^n$ je soubor (3-tenzor) reálných čísel takový, že pro každé $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $a_{ijk} = a_{ikj} = a_{jik} = a_{jki} = a_{kij} = a_{kji}$ a také $a_{iij} = 0$.
Dokažte, že existuje konstanta $c > 0$ taková, že

$$c \max_{x,y,z \in [-1,1]^n} \sum_{i,j,k=1}^n a_{ijk} x_i y_j z_k \le \max_{x \in [-1,1]^n} \sum_{i,j,k=1}^n a_{ijk} x_i x_j x_k.$$

Dále se pokuste najít co možná největší takovou konstantu c.