1. písemka, řešení

1. Označme A_i množinu čísel mezi 1 a 420 dělitelných číslem i. Potom podle principu inkluze a exkluze

$$|A_6 \cup A_7 \cup A_10| = |A_6| + |A_7| + |A_{10}| - |A_6 \cap A_7| - |A_6 \cap A_{10}| - |A_7 \cap A_{10}| + |A_6 \cap A_7 \cap A_{10}| =$$

$$= |A_6| + |A_7| + |A_{10}| - |A_{42}| - |A_{30}| - |A_{70}| + |A_{210}| = 70 + 60 + 42 - 10 - 14 - 6 + 2 = 144.$$

Tedy odpověď na zadání úlohy je $420 - 144 = 276$.

2. Posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$ odpovídá VF $\frac{1}{1-x}$. Posloupnosti $(1, 2, 3, \dots)$ odpovídá VF $\frac{1}{(1-x)^2}$ (to se získá buď zderivováním předchozí VF, nebo konvolucí sama se sebou). Posloupnosti $(0, 2, 4, 6, \dots)$ tedy odpovídá vytvořující funkce $\frac{2x}{(1-x)^2}$. Sečtením této posloupnosti s posloupností samých jedniček dostaneme posloupnost ze zadání, tedy příslušná vytvořující funkce po úpravách je $\frac{1+x}{(1-x)^2}$.

3. Pro část (a) spočítáme, že mezi A a B vede $2 \cdot |A| = 4 \cdot 8$ hran. Tedy $|A| = 16$.
Pro část (b) ukážeme, že maximální párování má velikost 8. Větší být určitě nemůže, neboť $|B| = 8$. K tomu, že existuje párování velikosti 8 stačí ověřit Hallovu podmínku: nechť $I \subseteq B$. Spočtěme počet hran (značený e_I) mezi I a $N(I)$. Od části B získáváme, že $e_I = 4 \cdot |I|$. Od části $|A|$ dostáváme, že $e_I \leq 2|N(I)|$. Tedy $N(I) \geq 2|I| \geq |I|$, čímž je Hallova podmínka ověřena.

4. Pro spor nechť G má vrcholový řez velikosti 1 tvořený vrcholem v. Vrchol v tedy sousedí s alespoň dvěma komponentami grafu $G - v$. Vzhledem k tomu, že má stupeň 4, tak alespoň do jedné z komponent vedou z v nejvýše dvě hrany. Odstraněním těchto dvou hran dostaneme hranový řez velikosti nejvýše 2. To je spor s hranovou 3-souvislostí.