2. cvičení z MA — 13.10.2008

Matematická indukce

Jak funguje důkaz matematickou indukcí? Zkuste to na následujících příkladech!

1. Pro přirozené $n \neq 3$ platí $2^n \geq n^2$.

2. Pro každé n přirozené platí
(a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
(b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}$

3. Pro každé n přirozené a x reálné platí

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} .$$

4. (Bernoulliho nerovnost) Pro přirozené n a reálné $x > -1$ platí $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

5. $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. Přitom e je základ přirozeného logaritmu; bude se vám hodit, že $(1 + 1/n)^n \leq e$ pro každé přirozené n, to dokazovat nemusíte. Pro horní odhad lze místo indukce použít AG-nerovnost.

6. * Dokažte AG-nerovnost (z minulého týdne). Návod: napřed dokazujte pro $n = 2^k$ (k přirozené), pak pro ostatní n "zpětnou indukcí" $n + 1 \to n$.