1. cvičení z MA — 6.10.2008

Funkce

1. Nakreslete grafy následujících funkcí:
(a) $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos(x+\pi)$, $\cos(2x+\pi)$
(b) $\big||x-1|-1\big|$, $\big||x-1|-1\big|^2$, $\big||x-1|^2-1\big|$
(c) $\sin|x|$, $|\sin x|$
(d) * $\sin x^2$, $\sin 1/x$, $\ln\sin x$, $\ln\ln\sin x$
(e) $\sqrt{1-x^2}$
(f) $\sin x\cdot\cos x$
(g) * $x+1/x$

2. Vyhovuje funkce daná předpisem $f(x)=\sin x$ následujícímu výroku, nebo jeho negaci?

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists K>0)(\forall x\in\mathbb{R})\quad x>K\Longrightarrow|f(x)|<\varepsilon$$

3. Který z následujících výroků je silnější?

- $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists K>0)\quad |f(x+1)-f(x)|\le K$
- $(\exists K>0)(\forall x\in\mathbb{R})\quad |f(x+1)-f(x)|\le K$

4. Buď $f:X\to Y$ libovolné zobrazení, $A,B\subseteq X$ libovolné množiny.
(a) Jaký je vztah mezi množinami A a $f^{-1}(f(A))$?
(b) Jaký je vztah mezi množinami $f(A\cup B)$ a $f(A)\cup f(B)$?
(c) Jaký je vztah mezi množinami $f(A\cap B)$ a $f(A)\cap f(B)$?

AG nerovnost

5. Pro kladná reálná čísla $x_1,\ldots,x_n$ platí

$$\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\le\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)\,.$$

Dokažte pro $n=2$ a zapamatujte si pro všechna přirozená n.

Logika, výroky

6. Pro libovolné výroky a, b jsou následující výroky ekvivalentní. Rozmyslete si a dobře zapamatujte, při chápání důkazů se vám to bude hodit!
(i) $a\Rightarrow b$, (ii) $\neg b\Rightarrow\neg a$, (iii) $\neg a\vee b$, (iv) $\neg(a\&\neg b)$.

7. Řekněte bez použití "implikace": Nebude-li pršet, nezmoknem. Kdo se bude snažit, dostane zápočet. Kdo získá dost bodů z písemky, dostane zápočet. Kdo nebude nic umět a nebude se snažit, ten nedostane zápočet.

8. Znegujte: Když prší, nevycházím z domu. Nebude-li pršet, nezmoknem. Zmokneme, právě když bude pršet.

9. Zapište pomocí kvantifikátorů a znegujte: Všechna přirozená čísla jsou sudá. Každé prvočíslo je liché. Některé přirozené číslo je dělitelné všemi prvočísly. Mezi n a $2n$ vždy najdeme nějaké prvočíslo.