PERFEKTNÍ PÁROVÁNÍ - OBECNÉ

KVĚTINOVÝ ALGORITMUS - JACK EDMONDS 1964

IDEA: Hledání alternující cesty + kontrakce lichých cyklů

<u>Def</u>: G/C ... kontrakce, ztotožnění vrcholů C
(hrany $C \times G \setminus C$ zůstanou, i jako multihrany, $C \times C$ se vypustí)

<u>Pozorování</u>: M' perf. párování v G/C, C lichý cyklus.
Pak ex. perf. párování v G rozšiřující M'

ALGORITMUS:

$A(T) = \{v \mid$ vzd. r, v liché$\}$

$B(T) = \{v \mid$ vzd. r, v sudá$\} \ni r$

(0) $M := \emptyset$, $G' = G$

(1) r := nespárovaný vrchol v G, $T = (\{r\}, \emptyset)$ [r není $\Rightarrow$ KONEC, M perfektní]

(2) $uv \in E'$, $u \in B(T)$, $v \notin T$:

v nespárovaný: zvětšíme T, goto (1)

v spárovaný v M: zvětšíme T, goto (2)

(3) $uv \in E'$, $u, v \in B(T)$:

P_u, P_v cesty z u, v ke spol. předku

$C := P_u \cup P_v \cup \{uv\}$

$G' := G'/C$ $\quad T := T/C$ $\quad M := M/C$ $\quad$ goto (2)

(4) jinak FAIL

Lze implementovat v čase $O(mn)$

PERFEKTNÍ PÁROVÁNÍ – ZLEPŠENÝ LP

Def: D je lichý řez, pokud $D = \delta(S)$ pro $S \subseteq V$, $|S|$ liché

$\delta(S) = \{uv \in E \mid u \in S, v \notin S\}$

LP:

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$(\forall v) \quad x(\delta(v)) = 1$$

$$(\forall D \text{ lichý řez}) \quad x(D) \geq 1$$

$$x_e \geq 0$$

Duální LP: $\max \sum_{v \in V} y_v + \sum_D Y_D$

$$(\forall e = uv \in E) \quad y_u + y_v + \sum_{D: e \in D} Y_D \leq c_e$$

$$(\forall D) \quad Y_D \geq 0$$

Def: Redukovaná cena: $\bar{c}_e = c_e - y_u - y_v - \sum_{D \ni uv} Y_D$

Komplementarita

$$e \in M \Rightarrow \bar{c}_e = 0$$

$$Y_D > 0 \Rightarrow |M \cap D| = 1$$

Idea algoritmu: Jakmile $Y_D > 0$, přejdeme ke grafu G/D; D odpovídá <u>pseudovrcholu</u>

Stejně jako bipartitní:
hledáme $M, T \subseteq E_=$ $\quad E_= = \{e \mid \bar{c}_e = 0\}$
pokud nelze rozšířit M, T, změníme y tak, aby se zvětšilo $E_=$

PERF. PÁROVÁNÍ min. váhy – ALGORITMUS

základní cyklus, G', M, T – jako dříve

- $uv \in E_=$, $u \in B(T)$, $v \notin T$: zvětšíme M nebo T – jako dříve *
- $uv \in E_=$, $u,v \in B(T)$: kontrahujeme $C = P_u \cup P_v \cup \{u,v\}$ jako dříve

  navíc pro $ab \in E$, $a \in C$, $b \notin C$: $c_{ab} := c_{ab} - y_a$

  [zachováme množinu $E_=$;
  u nového pseudovrcholu máme podmínku $y_C \geq 0$;
  liché řezy v G'/C jsou liché řezy i v G']
- Nechť $v \in A(T)$ je pseudovrchol takový, že $y_v = 0$:
  expandujeme příslušný lichý cyklus C, do T z něj přidáme správnou alternující cestu
  upravíme zpět $c_{ab} := c_{ab} + y_a$ pro $a \in C$, $b \notin C$
  [Zachováme $M, T \subseteq E_=$]
- Jinak změníme y:

$$y_v := \begin{cases} y_v + \varepsilon & v \in B(T) \\ y_v - \varepsilon & v \in A(T) \\ y_v & \text{jinak} \end{cases}$$

ε = minimum z:

$$\begin{array}{ll} \bar{c}_{uv} & u \in B(T), v \notin T \\ \bar{c}_{uv}/2 & u,v \in B(T) \\ y_v & v \in A(T) \text{ je pseudovrchol} \end{array}$$

[vede k jiné možnosti;
pokud není omezení, neexistuje perf. párování]

Při konstrukci jednoho T vznikají pseudovrcholy v $B(T)$, expandují se v $A(T)$.

$\boxed{V}$ Alg. je polynomiální

* pozor, při zvětšení M neexpandujeme G

PÁROVÁNÍ MAXIMÁLNÍ VÁHY (ne nutně perf.)

- redukcí: přidáme n vrcholů spojených se všemi hranami s cenou 0

- úpravou algoritmu:

MAXIMÁLNÍ PÁROVÁNÍ

při nenalezení alternující cesty můžeme vynechat celý strom

PERF. PÁROVÁNÍ MIN. VÁHY

- složitější úprava, všechny $y_v \geq 0$, další případ