TOTÁLNĚ UNIMODULÁRNÍ MATICE

Def: Matice A je totálně unimodulární, když determinant každé čtvercové podmatice je $0, -1$, nebo 1

$\boxed{V}$ Nechť A je totálně unimodulární a $b \in \mathbb{Z}^m$. Pak polyedr $\{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ má všechny vrcholy celočíselné a úloha LP $\max c^T x$, $Ax \leq b$ má celočíselné optimum

Dk: vrchol $= A_B^{-1} \cdot b$ pro nějakou bázi.

Tot. unim. matice má prvky $0, \pm 1$

Pozorování: Přidání řádku/sloupce s jedinou 1 a nulami nezmění tot. unimodularitu

Vynásobení řádku -1 také nezmění tot. unim.

Transpozice —— " ——

$\boxed{V}$ Nechť A má max. 2 nenuly ve sloupci. Nechť sloupcové součty jsou $0, \pm 1$. Pak A je tot. unimodulární.

Příklad: Incidenční matice orientovaného grafu

$\boxed{V}$ Nechť A má max. 2 nenuly ve sloupci. Pak je tot. unim právě když se dá vynásobením řádků -1 dostat do tvaru z předchozí věty.

Dk: jen náznak

Příklad Incidenční matice neorientovaného grafu G je tot. unimodulární $\Rightarrow$ G je bipartitní

BIPARTITNÍ PÁROVÁNÍ

$G = (V, E)$ neor. bipartitní graf., ~~bez izolovaný~~

$\max \sum x_e$

$\forall v \in V \quad \sum_{e: v \in e} x_e \leq 1$

$x_e \geq 0$

zlomkové párování ↑

DUÁL:

$\min \sum y_u$

$\forall e = \{u, v\} \quad y_u + y_v \geq 1$

$y_u \geq 0$

zlomkové vrcholové pokrytí

Pozor: Matice soustavy je tot. unimodulární

Dk: ~~incidence~~ Matice incidence + řádky s jedinou 1

$\Rightarrow$ existuje celočíselné optimum

$\Rightarrow$ existuje 0-1 optimum (ze struktury)

$\boxed{V}$ (König) V bipartitním grafu je

$\max\{|M| : M \text{ je párování}\} = \min\{|C| : C \text{ je vrch. pokrytí}\}$

Pro obecné grafy neplatí

- párování $\in P$
- vrcholové pokrytí NP-úplné

Z věty o komplementaritě:

$\{u,v\} = e \in M \; \ldots \; x_e^* = 1 \Rightarrow y_u^* + y_v^* = 1 \; \ldots \; |C \cap \{u,v\}| = 1$

$v \in C \quad y_v^* = 1 \Rightarrow \exists e \; v \in e \in M$

TOKY V SÍTÍCH

dáno: orientovaný graf $G=(V,E)$ s kapacitami $h: E \to \mathbb{R}_0^+$

s, t ... zdroj a stok

předpokládejme hranu (t,s) nekonečné kapacity

~~KPL~~ nechť $f_x(v) = \sum_{w: wv \in E} x_{wv} - \sum_{w: vw \in E} x_{vw}$ "čistý tok do v"

$\boxed{\text{LP:}}$ max x_{ts}

$$f_x(v) = 0 \qquad \forall v \in V$$

$$\left.\begin{array}{l} x_e \geq 0 \\ x_e \leq h(e) \end{array}\right\} \forall e$$

$\boxed{\text{V}}$ Existuje optimální celočíselný tok, pokud $h(e) \in \mathbb{Z}$.

Dk: Matice je tot. unimodulární

Duální LP: proměnné $y_v \in \mathbb{R}$ ...

$z_e \geq 0$ .. odp. nerovnosti $x_e \leq h(e)$

$$\min \sum_e h(e) z_e$$

$\forall uv \in E$ $\quad -y_u + y_v + z_{uv} \geq 0$

ts: $\quad -y_t + y_s \geq 1$

[minimální]

[Optimální] celočíselné řešení definuje řez:

$U = \{v \mid y_v^* > y_t^*\}$ $\quad s \in U$, $t \notin U$

$uv = e \in U \times (V \setminus U)$

$\Rightarrow y_u \geq v_v + 1$

$\Rightarrow z_{uv} \geq 1$

$\Rightarrow$ účelová fce $\geq$ cena řezu

$\boxed{\text{V}}$ Cena minimálního řezu = velikost max. toku

JINÁ FORMALIZACE TOKŮ:

duál $\rightarrow$ $\min \sum_{e \in E} h(e) z_e$

(LP2) $\forall$ cesta P_2 s do t: $\sum_{e \in P} z_e \geq 1$

$z_e \geq 0$

duál: $\max \sum y_P$

s.t.: $(\forall e)$ $\sum_{P \ni e} w_P \leq h(e)$

$w_P \geq 0$

dává rozklad na cesty

PERFEKTNÍ PÁROVÁNÍ MIN. CENY V BIPARTITNÍM GRAFU – PRIMÁRNĚ DUÁLNÍ ALG.

$x(D) = \sum_{e \in D} x_e$, $\delta(v) = \{e \mid v \in e\}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \min \sum c_e x_e \\ (\forall v) & x(\delta(v)) = \sum_{e: v \in e} x_e = 1 \\ (\forall e) & x_e \geq 0 \end{array}}$$

víme: totálně unimodulární $\Rightarrow$ celočíselné opt.

IDEA PRIM. DUÁLNÍHO ALG.:

udržujeme: přípustné řešení duálního ~~pro~~ LP
řešení (nepřípustné) prim. LP
= párování M, ne nutně perfektní
tak, že splňují komplementaritu

DUÁLNÍ LP: $\max \sum_{v \in V} y_v$

$\forall e = uv \quad y_u + y_v \leq c_e$

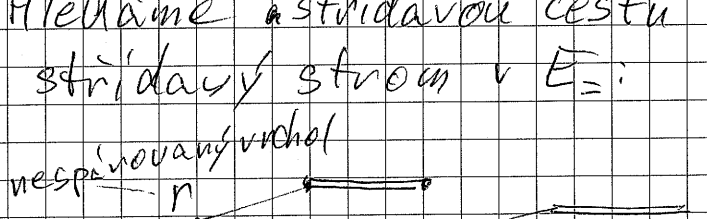
def: $\bar{c}_e = c_e - (y_u + y_v)$ redukovaná cena

KOMPLEMENTARITA: $x_{uv} > 0 \Rightarrow y_u + y_v = c_{uv}$

def: $E_= = \{uv \in E \mid y_u + y_v = c_e\}$

Udržujeme $M \subseteq E_=$: M perfektní $\Rightarrow$ optimum

Hledáme střídavou cestu tak, že postupně budujeme střídavý strom v $E_=$:



def: $A(T)$ … lichá vzd. od r
$B(T)$ … sudá vzd. od r

ALG:

(1) $y \equiv 0$, $M = \emptyset$

(2) $r :=$ nespárovaný vrchol v M

$T := (\{r\}, \emptyset)$

(3) Nechť $vw \in E_=$, $v \in B(T)$, $w \notin T$

w spárovaný v M se z: přidáme vw, wz do T, goto (3)

w nespárovaný: zvětšíme M pomocí střídavé cesty $r \to w$

if M perfektní: STOP, OPTIMUM

jinak: goto (2)

[taková hr. neex.]

(4) $\varepsilon := \min \{ c_{vw} \mid vw \in E, v \in B(T), w \notin T \}$

if $\varepsilon = \infty$: STOP, neexistuje perf. párování

$$y_v := \begin{cases} y_v + \varepsilon & v \in B(T) \\ y_v - \varepsilon & v \in A(T) \\ y_v & \text{jinak} \end{cases}$$

goto (3)

---

korektnost (4): zachovává: přípustnost y

$M \subseteq E_=$, protože $E_=$ se zvětší

po (4) vždy následuje zvětšení M nebo T

M se zvětší $\leq n$-krát

T se zvětší $\leq n^2$-krát