DUALITA LP

Příklad: max $x_1 + x_2 + x_3$

tak, že
$$x_1 - x_2 \le 1 \quad | \cdot y_1$$
$$x_2 + x_3 \le 1 \quad | \; y_2$$
$$2x_2 - x_3 \le 1 \quad | \cdot y_3$$
$$2x_2 + x_3 \le 5 \quad | \cdot y_4$$

$$y_1 x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3 \underset{+2y_4}{)} x_2 + (y_2 - y_3 \underset{+y_4}{)} x_3 \le y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4$$

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ je řešení. Jak získáme horní odhad?

$y_1 = 1 \quad y_2 = 0 = y_3 \quad y_4 = 1$ dá $\quad x_1 + x_2 + x_3 \le 6$

$y_1 = 1 \quad y_2 = \frac{4}{3} \quad y_3 = \frac{1}{3}$ dá $\quad x_1 + x_2 + x_3 \le \frac{8}{3}$

$x_1 = \frac{5}{3} \quad x_2 = \frac{2}{3} \quad x_3 = \frac{1}{3}$ je optimální řešení

DUÁLNÍ LP: Hledá optimální koeficienty $y_1, \dots, y_m$

$$\min \; y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4$$
$$y_1 = 1$$
$$-y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 1$$
$$y_2 - y_3 + y_4 = 1$$

OBECNĚ: Duální LP získáme takto: (primární $Ax \le b$, $\max c^T x$)

Duální proměnná y_j pro každou primární podmínku

$y_j \in \mathbb{R}$ pro podmínka $\sum_i a_{ji} x_i = b_j$

$y_j \ge 0$ $\quad \sum_i a_{ji} x_i \le b_j$

D. Podmínka pro každou prim. proměnnou

$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j = c_i \qquad x_i \in \mathbb{R}$

$\sum a_{ji} y_j \ge c_i \qquad x_i \ge 0$

a cíl je $\min \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$

Pozorování: Duální LP k duálnímu LP je původní LP.

Důležité případy: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

(P) $\max c^T x$
$Ax \leq b$
$x \in \mathbb{R}^n$

(D) $\min b^T y$
$A^T y = c$
$y \geq 0$

$(\overline{P})$ $\max c^T x$
$Ax \leq b$
$x \geq 0$

$(\overline{D})$ $\min b^T y$
$A^T y \geq c$
$y \geq 0$

$\boxed{V}$ (Slabá věta o dualitě) Nechť x, y jsou přípustná řešení (P) a (D). Pak $c^T x \leq b^T y$

Dk: $y^T A x \leq y^T b$ z prim. úlohy (P) a $y \geq 0$
$y^T A x = c^T x$ z duální úlohy (D)

$\boxed{V}$ (O dualitě) Pro úlohy (P) a (D) [nebo $(\overline{P})$ a $(\overline{D})$] nastává jedna z možností:

(1) Ani (P) ani (D) nemá přípustné řešení.

(2) Jedna z nich je neomezená a druhá nemá příp. řešení.

(3) (P) i (D) mají přípustné řešení. Pak existují optimální řešení x^* pro (P) a y^* pro (D) a platí
$$c^T x^* = b^T y^*.$$

FARKASOVO LEMMA

FOURIER-MOTZKINOVA ELIMINACE

GAUSSOVA ELIMINACE:

$Ax = b$ má řešení $\Leftrightarrow$ lineární kombinací nelze odvodit spor

$\Leftrightarrow$ $A^T y = 0$, $b^T y = -1$ nemá řešení

NEROVNICE: smíme dělat ~~pozitiv~~ nezáporné lineární kombinace

FOURIER-MOTZKINOVA ELIMINACE

$$(*) \quad \begin{aligned} a_i^T x' + x_n &\leq b_i & i &= 1, \dots, m' \\ a_i^T x' - x_n &\leq b_i & i &= m'+1, \dots, m'' \\ a_i^T x' &\leq b_i & i &= m''+1, \dots, m \end{aligned} \qquad x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$(*)$ má řešení právě když $(**)$ má řešení

$$(**) \quad \begin{aligned} (a_i^T + a_j^T) x' &\leq b_i + b_j & i &= 1, \dots, m' \quad j = m'+1, \dots, m'' \\ a_i^T x' &\leq b_i & i &= m''+1, \dots, m \end{aligned}$$

$\boxed{V}$ (Farkasovo lemma pro nerovnosti) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$Ax \leq b$ má řešení $x \in \mathbb{R}^n$ právě když neexistuje $y \in \mathbb{R}^m$ tak, že

$y \geq 0 \quad A^T y = 0 \quad b^T y < 0$

Dk: $\exists y \Rightarrow Ax \leq$ nemá řešení triv. – L.K.

$Ax \leq b$ nemá řešení $\Rightarrow$: F.M. eliminací zkonstruujeme $(**)$, z něj y', pak y pro pův. systém

$\boxed{V}$ (Farkasovo lemma) Systém $Ax=b$ má nezáporné řešení právě když neexistuje y tak, že $A^Ty \geq 0$ a $b^Ty < 0$.

Dk: $A' = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix}$ $b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$

(Farkas pro $\leq$)

$Ax=b$ má nezáp. řeš. $\Leftrightarrow$ $A'x \leq b'$ má řešení $\Leftrightarrow$ neex. y'...

$\Leftrightarrow$ neex. y $\left(y_j = y'_j - y'_{j+m}\right)$.

$\boxed{V}$ Nechť $Ax \leq b$ má řešení. Pak platí

každé řešení x $Ax \leq b$ splňuje $c^Tx \leq \delta$

právě když

existuje $y \geq 0$ takové, že $A^Ty = c$ a $b^Ty \leq \delta$

Dk: $\begin{matrix} Ax \leq b \\ -c^Tx \leq -\delta - \varepsilon \end{matrix}$ nemá řešení pro žádné $\varepsilon > 0$ $\overset{}{\underset{\text{Farkas}}{\Longleftrightarrow}}$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \begin{matrix} y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{matrix}$ ~~$(A^T \; c)\, y = 0 \wedge b^T$~~

$A^Ty - cz = 0 \wedge b^Ty - (\delta+\varepsilon)z < 0$

$\underset{(z \neq 0, \text{ protože } Ax \leq b \text{ má řešení})}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists y \geq 0 \; A^Ty = c \wedge b^Ty \leq \delta + \varepsilon$

Lépe: ~~$\exists y \geq 0, \lambda \geq 0$ takové, že $A^Ty = c$, $b^Ty + \lambda = \delta$~~ ~~$-b^Ty - \lambda = -\delta$~~

~~$\overset{(F.l.)}{\Longleftrightarrow}$ Neex. x, z takové, že $Ax + b^Tz \geq 0$, $\lambda z \geq 0$~~ $c^Tx + \delta z < 0$

~~$\Leftarrow$ $\exists y \geq 0$.. $\Rightarrow$ máme lin. komb.~~

$\Rightarrow$ neex. $y \geq 0, \lambda \geq 0$ $\quad A^Ty = c$, $\; b^Ty + \lambda = \delta$

$\Rightarrow$ (F.l.) $\exists z \geq 0, \mu \geq 0$ $\quad Az + b^T\mu \geq 0$, $\quad c^Tz + \delta\mu < 0$

$\mu > 0$: $\quad A\left(-\frac{1}{\mu}\right)z \leq b^T \quad c^T\left(-\frac{1}{\mu}\right)z > \delta$

$\mu = 0$: $\quad Ax^0 \leq b$

$Az \geq 0 \quad c^Tz < 0$

$A(x^0 - \gamma z) \leq b \quad c^T(x^0 - \gamma z) > \delta$ (neomezené)

DUALITA Z FARKASOVA LEMMATU

Dk: Nechť ex. prim. + duál. řeš., $\delta = \sup\{c^Tx \mid Ax \le b, x \in \mathbb{R}^n\} \le \inf\{b^Ty \mid A^Ty = c, y \ge 0, y \in \mathbb{R}^m\}$

slabá věta o dualitě

Pak, dle předch. v. $\exists y^* \ge 0$ $A^Ty^* = c \wedge b^Ty^* \le \delta$

Tedy platí rovnost a y^* je duální optimum.

Existence primárního optima:

(1) z uzavřenosti

(2) stejně s prohozením (P) a (D)

$\boxed{V}$ (complementary slackness – o komplementaritě)

Je-li x^* ~~opt.~~ příp. ř. (P) a y^* ~~opt.~~ příp. ř. (D),

pak x^* a y^* jsou obě optimální právě když

(∗) $\quad \forall j = 1, \dots, m \quad y_j^* = 0 \vee a_j x^* = b_j \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* = b_j\right)$

Je-li x^* příp. ř. $(\bar{P})$ a y^* příp. ř. $(\bar{D})$,

pak jsou obě optimální právě když (∗) a (∗∗)

(∗∗) $\quad \forall i = 1, \dots, m \quad x_i^* = 0 \vee \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j = c_i$

Dk: (1) $y^{*T}b - c^Tx^* = y^{*T}(b - Ax^*) = \sum_{j=1}^{m} y_j^*(b_j - a_j x^*) \ge 0$

z podmínek (D)

rovnost $\iff$ (∗)

(2) $y^{*T}b - c^Tx^* = y^{*T}(b - Ax^*) + (y^{*T}A - c^T)x^* \ge 0$