OPTIMALIZAČNÍ METODY – LS 2010

OPTIMALIZACE

- analýza
- kombinatorická optimalizace
- matematické programování
  - lineární programování

PŘÍKLADY KOMB. OPT.

- nejkratší cesta v grafu
- minimální kostra
- párování
- toky v síti

LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

- minimalizace/maximalizace lineární funkce na oboru daném lineárními nerovnostmi

HISTORIE A PRAXE

- 40 léta Dantzig, Kantorovich
- teorie her - von Neumann
- dualita
- polynomiální algoritmy
- software
- rozšíření, celočíselné programy, apx. alg.

TATO PŘEDNÁŠKA

- vztah komb. opt. a lineárního programování
- teorie lineárního programování
- simplexová metoda
- jiné algoritmy pro LP
- párování v grafech
- celočíselné programování
- použití LP pro obtížné úlohy

LITERATURA

Matoušek: LP a LA pro informatiky

Cook et al.: Combinatorial optimization

ADMIN

domácí úkoly - zápočet

web

konzultace

ÚLOHA LP PODROBNĚJI

- Příklad LP v rovině
  - možnost: - má opt. řešení
    - nepřípustná (nemá přípustné řešení)
    - neomezená

  pozn: nemusí být celočíselné int. řešení apod.

- Příklad jako rovnice a nerovnice
- Úpravy úlohy
  - rovnice / nerovnice
  - nezáporné / obecné proměnné

<u>Def</u>: Úlohou LP rozumíme optimalizační úlohu s cílem

maximalizovat $c^T x$

přes všechny $x \in \mathbb{R}$ splňující $Ax \leq b$

pro matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, a vektory $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

<u>Def</u>: $c^T x$ je účelová fce

$Ax \leq b$ jsou omezující podmínky

$x \in \mathbb{R}^n$ splňující $Ax \leq b$ je přípustné řešení

přípustné x s maximální možnou $c^T x$ je optimální řešení

(optimum - dvojznačné x vs. $c^T x$)

<u>Def</u>: Úloha je - neomezená pokud $c^T x$ je lib. velké

- nepřípustná pokud nemá přípustné řešení

<u>Def</u>. Úloha LP v rovnicovém tvaru:

$$\max c^T x$$
$$\text{t. že } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

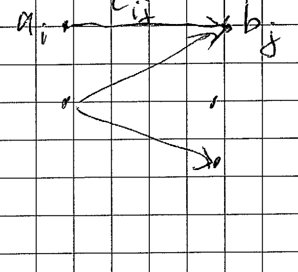
VZTAH LP A LIN. ALGEBRY

téma:	lineární rovnice (obecné těleso)	lineární nerovnice (nad $\mathbb{R}$)
řešení:	afinní podprostor	konvexní mnohostěn
metoda:	Gaussova eliminace	simplexová metoda
teorie:	dimenze, hodnost	dualita

PŘÍKLADY

DOPRAVNÍ PROBLÉM

proměnné: x_{ij}: dopraveno z i do j



$$\min \sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$$

takže $\forall i \quad \sum_j x_{ij} \overset{=}{\le} a_i$

$\forall j \quad \sum_i x_{ij} \overset{=}{\ge} b_j$

$x_{ij} \ge 0$

~~spec. příklad toků v sítích~~

NEJKRATŠÍ CESTA

- motivace: obchodování na burze

dán: digraf s váhami c_e

LP formulace: cesta ~~max~~ $s \rightsquigarrow t$

prom. y_v = „potenciál" vrcholu v

$\max \; y_t - y_s$

splňující ~~$\forall e \in E$~~ $\forall uv \in E \quad y_v - y_u \le c_{uv}$

Tvrzení: Optimum je délka nejkratší cesty.

DK: (2) Ford-Bellmanův alg. dává potenciál

(1) Každé přípustné řešení dává dolní odhad

Duální LP: $\min \sum_e c_e x_e$

takže $\forall v \quad \sum_{u: uv \in E} x_{uv} - \sum_{w: vw \in E} x_{vw} = b_v \qquad b_v = \begin{cases} -1 & v = s \\ +1 & v = t \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$x_{uv} \ge 0$

neceločíselné řešení?

CELOČÍSELNÉ PROGRAMOVÁNÍ (LINEÁRNÍ)

$$\max c^T x$$
splňující $Ax \leq b$
$x \in \mathbb{Z}^n$

Poznámky: - pozor na eliminaci proměnných
- smíšené celoč. programy
~~obecné~~ - 0-1 celoč. programy
binární

PŘÍKLADY:

VRCHOLOVÉ POKRYTÍ

$\min \sum x_v$
splň. $\forall uv \in E \quad x_u + x_v \geq 1$
$x_u \in \{0,1\}$

NEZÁVISLÁ MNOŽINA

$\max \sum x_v$
splň. $\forall uv \in E \quad x_u + x_v \leq 1$
$x_u \in \{0,1\}$

LP vs. IP

IP - NP úplné, existují heuristiky

LP - dobře řešitelné teoreticky i prakticky

~~PERF.~~ PÁROVÁNÍ V BIPARTITNÍM GRAFU

DÁNO (VSTUP): Bip. graf (U, V, E), $E \subseteq U \times V$, $w: E \to \mathbb{R}^+$

VÝSTUP: $M \subseteq E$ tak, že ~~max.~~ st. je 1 každého vrcholu

CÍL: $\max \sum_{e \in E} w_e$

celoč. LP: proměnné x_e

$$\max \sum_{e \in E} w_e x_e$$

$$\text{tak, že} \quad \forall u \in U \quad \sum_{v: uv \in E} x_e \leq 1$$

$$\forall w \in V \quad \sum_{v: vw \in E} x_e \leq 1$$

$$x_e \in \{0, 1\}$$

LP relaxace: dtto, $x_e \geq 0$

<u>Tvrzení</u>: Optimální řešení IP je optimálním řešením LP.

<u>Dk</u>: Rotace