Ověřování lineární nezávislosti

Je množina vektorů

$$X = \{(2,1,0,3)^T, (4,3,1,4)^T, (0,2,2,1)^T, (3,4,1,0)^T, (0,2,2,2)^T\}$$

lineárně nezávislá v prostoru $\mathbb{Z}_5^4$? Pokud nikoli, vyberte z nich bázi $\mathcal{L}(X)$.

a) Využitím faktu, že elementární operace nemění *řádkový prostor* lze zodpovědět první otázku:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Získali jsme nulový řádek. Jinými slovy nulový vektor se dá získat jako netriviální lineární kombinace a X je proto lineárně závislá.

b) Obě otázky lze zároveň vyřešit hledáním netriviálního řešení rovnice $a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = 0$.

Dostaneme homogenní soustavu s maticí:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že ve výsledné matici máme alespoň jednu volnou proměnnou: a_3. Soustava má i netriviální řešení a proto je množina X lineárně závislá. Navíc *bázické proměnné* odpovídají lineárně nezávislým vektorům. Tyto vektory — jmenovitě $(2, 1, 0, 3)^T$, $(4, 3, 1, 4)^T$, $(3, 4, 1, 0)^T$ $(0, 2, 2, 2)^T$ — tvoří hledanou bázi $\mathcal{L}(X)$.