

Jméno a příjmení:

1	2	3	4	5	6

2A. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 16.6.2023

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete kromě svého jména a příjmení rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejný papír!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčíslujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe zítra dopoledne.

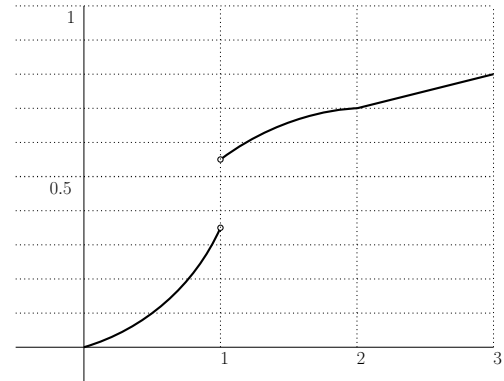
Možná se vám bude hodit následující tabulka kvantilových funkcí

	0.9	0.95	0.975	0.99
$\Phi^{-1}(t)$	1.281552	1.644854	1.959964	2.326348
$\Psi_2^{-1}(t)$	1.885618	2.919986	4.302653	6.964557
$\Psi_3^{-1}(t)$	1.637744	2.353363	3.182446	4.540703
$\Psi_4^{-1}(t)$	1.533206	2.131847	2.776445	3.746947

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů) Na obrázku je zakreslená distribuční funkce náhodné veličiny X . Hodnota $F_X(1)$ není na obrázku vyznačena.

- Určete $F_X(1)$.
- Co můžete říct o hodnotě $F_X(4)$?
- Spočtěte $P(X < 1)$.
- Spočtěte $P(X > 1)$.
- Spočtěte $P(2 < X < 3)$.
- Určete medián.



2. (10 bodů) Po lesní cestě jde turista a proti němu po stejné cestě jde medvěd. Když ho turista zpozoruje, tak z cesty uhne o vzdálenost, kterou popíšeme náhodnou veličinou $U \sim U(0, 5)$. Pokud turista uhne o vzdálenost u , tak s pravděpodobností $\lceil u \rceil^2/30$ bude medvěd pokračovat v cestě, jinak na turistu zaútočí. ($\lceil u \rceil$ znamená u zaokrouhleno nahoru).

- S jakou pravděpodobností medvěd zaútočí?
- Pokud víme, že medvěd nezaútočil, jaká je pravděpodobnost, že turista uhnul o méně než 2 metry?
- Medvěd potká během dne celkem deset turistů. Předpokládáme, že všechna setkání se řídí stejným modelem a probíhají navzájem nezávisle. Označme X počet turistů, na které medvěd zaútočil. Určete $\mathbb{E}(X)$ a $P(X \leq 1)$.
- Stejným postupem medvěd potkává další a další turisty. Označme T pořadí turisty, na kterého medvěd jako prvního zaútočil. Určete $\mathbb{E}(T)$ a $P(T > 10)$.

3. (10 bodů) Odhadněme chybu v součtu zaokrouhlených čísel: čísla X_1, \dots, X_n zaokrouhlíme na nejbližší celé číslo, tj. pro každé i je $X_i = Z_i + E_i$, kde $Z_i \in \mathbb{Z}$ a $-0.5 \leq E_i < 0.5$. Předpokládejme, že $E_i \sim U(-0.5, 0.5)$ a že veličiny E_1, \dots, E_n jsou nezávislé. Součet zaokrouhlených čísel $\sum_i Z_i$ se od součtu $\sum_i X_i$ přesných čísel liší o $E = \sum_i E_i$.

Použitím centrální limitní věty odhadněte hodnotu k , že $P(|E| > k) \doteq 0.95$.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem sdružená distribuční funkce.

Nechť $F = F_{X,Y}$ je sdružená distribuční funkce náhodných veličin X, Y . Nechť $F(1, 1) = 0.7$, $F(0, 1) = F(1, 0) = 0.4$. Jaká je nejmenší/největší možná hodnota $F(0, 0)$?

(b) Definujte pojem korelace dvou náhodných veličin.

Jaká je korelace $\rho(X, X)$ pro $X \sim U(0, 1)$?

Jaká je korelace $\rho(X, X^2)$ pro $X \sim U(0, 1)$?

Jaká je korelace $\rho(X, Y)$ pro $X, Y \sim U(0, 1)$ n.n.v.?

5. (10 bodů) Vysvětlete, jak se provádí test dobré shody.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o celkové střední hodnotě (neboli o výpočtu střední hodnoty rozbořením případů). Stačí varianta pro diskrétní náhodné veličiny.