4. cvičení z PSt — 6.–10.3.2023

Náhodné veličiny

Z obou částí vyřešte aspoň dva příklady.

Definice: d.n.v. $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé, pokud jsou nezávislé jevy $\{X_1 = x_1\}, \ldots, \{X_n = x_n\}$ pro každou n-tici čísel $x_1, \ldots, x_n$.

1. Uvažme $m + n$ hodů spravedlivou kostkou. Označme X počet šestek z prvních m hodů, Y počet šestek z posledních n hodů. Jaká je distribuce X, Y a $X + Y$?

2. Nechť $X = X_1 + \cdots + X_n$, kde pro každé i je $X_i \sim Bern(p)$. Pokud jsou veličiny $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé, tak $X \sim Bin(n, p)$. Ukažte na příkladu, že pokud omezení na nezávislost neuvedeme (tj. chceme jen $X_i \sim Bern(p)$), tak X může mít i jiné rozdělení.

[Nápověda: zkuste např. případ, kdy $X_1 = X_2 = \cdots = X_n$. Nebo $X_1 = X_2$, $X_3 = X_4$, ... a přitom $X_1, X_3, \ldots$ jsou nezávislé.]

3. Na koš nezávisle hází n hráčů basketbalu. Při každém hodu má každý z nich pravděpodobnost p, že se trefí, nezávisle na ostatních. Označme X_i pořadí hodu, kterým se i-tý hráč poprvé trefí. Označme dále $X = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Rozmyslete si

(a) Jaká je distribuce X_1, X_2, ...?
(b) Jsou veličiny X_1, X_2, ... nezávislé?
(c) Jaká je distribuce X?

4. Označme X počet meteorů, které uvidíte během hodinového pozorování. Jaké rozdělení použijete pro popis X?

---

5. Nechť X má uniformní rozdělení na množině $\{a, a+1, a+2, \ldots, b\}$ (pro celá čísla $a < b$). Tj., každé z čísel v té množině má stejnou pravděpodobnost jako hodnota veličiny X. Určete $\mathbb{E}(X)$.

6. Hádáme neznámé číslo, uniformně náhodně vybrané z množiny $\{1, \ldots, 10\}$. Jaký je průměrný počet potřebných otázek, pokud

(a) smíme klást otázky typu „je neznámé číslo rovno k“?
(b) smíme klást otázky typu „je neznámé číslo menší nebo rovno k“?

7. Filip má školu 2 km daleko od domu. Když prší (pravděpodobnost 0.6), tak jde pěšky rychlostí průměrně 5 km/h a přijde pozdě s pravděpodobností 0.5. Jinak jede na kole rychlostí 10 km/h a pozdě přijde s pravděpodobností 0.1.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že přijde pozdě?
(b) Jaká je průměrná rychlost, kterou cestuje do školy?
(c) Jaký je průměrný čas, který cesta trvá?

8. (Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n rublů. Jaká je střední hodnota odměny? Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

9. V televizní soutěži si účastník může vybrat dvě otázky. U otázky A odhaduje, že správně odpoví s pravděpodobností 0.8 (a dostane za to 1 000 Kč). U otázky B je jeho pravděpodobnost úspěchu jen 0.5, zato za správnou odpověď dostane 2 000 Kč. Po špatné odpovědi hra končí, po správné může zkusit druhou otázku (a odměnu za už správně odpovězenou otázku mu při špatně odpovězené další nepropadne).

(a) Jaká je střední hodnota výhry, pokud začne otázkou A?
(b) Jaká je střední hodnota výhry, pokud začne otázkou B?
(c) Bonus: pokud jsou pravděpodobností úspěchu p_A, p_B a odměny m_A, m_B, jak se má soutěžící rozhodnout?
(d) * A co když těch otázek bude víc než dvě?

Bonus

10. V pytlíku je N bonbónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme dva, označíme X počet dobrých vytažených bonbónů.

(a) Jak se jmenuje rozdělení n.v. X?
(b) Určete $\mathbb{E}(X)$.
(c) Můžete napřed řešit pro tažení jen jednoho bonbónu.
(d) * A co když vytáhneme tři, čtyři, $\ldots$, n bonbónů?