10. cvičení z PSt — 24.–28.4.2023

Konvoluce

1. Buďte $X, Y, Z \sim U(0,1)$ nezávislé náhodné veličiny.

(a) Jaké je rozdělení $X+Y$? Určete hustotu dvěma způsoby – podle konvolučního vzorce i „podle obrázku“.

(b) Jaké je rozdělení $X+Y+Z$? Pro jednoduchost určete hustotu jen na intervalu $[0,1]$.

(c) Jak výsledek ověřit samplováním?

Sdružená & podmíněná hustota

2. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x,y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).

(a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y.

(b) Určete také distribuční funkce F_X, F_Y, $F_{X,Y}$.

(c) Jsou X, Y nezávislé?

(d) Najděte $P(X+Y \le 1)$ a $P(X > Y)$.

3. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.

(b) Určete podmíněnou hustotu $f_{Y|X}$.

4. Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme Y. V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme X.

(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Může vám pomoci podmíněná hustota $f_{X|Y}$.

(b) Najděte marginální hustotu f_X.

(c) Pomocí f_X spočtěte $\mathbb{E}(X)$.

(d) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí vztahu $X = Y \cdot (X/Y)$.

Aplikace nerovností a Centrální Limitní Věty

Pro výpočty s funkcí Φ použijte tabulku z 5. cvičení nebo vhodný software, např. `https://t.ly/JRQ2`.

5. Počítání obsahu kruhu náhodným samplováním. Vygenerujeme náhodný bod ve čtverci (obě souřadnice budou mít rozdělení $U(0,1)$). Označíme X_i indikátor jevu „i-tý bod leží ve vepsaném kruhu“.

(a) Určete $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathrm{var}(X_i)$.

(b) Položte $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Určete $\mathbb{E}(S_n)$ a $\mathrm{var}(S_n)$.

(c) Všimněte si, že lze počítat S_n z S_{n-1}, X_n a n (nižší nároky na paměť).

(d) Pro jaké n čekáte, že dostaneme výsledek správně na jedno desetinné místo? Na dvě, tři, …?

6. Statistik chce odhadnout průměrnou výšku h (v metrech) lidí v nějaké populaci, pomocí n nezávislých vzorků $X_1, \ldots, X_n$, které vybíráme uniformně náhodně se všech možnych lidí. Pro odhad použije výběrový průměr $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Odhaduje, že směrodatná odchylka jednoho výběru je nejvýše 1 metr.

(a) Jak velké n má volit, aby směrodatná odchylka S_n byla nejvýše 1 cm?

(b) Pro jaké n zajistí Čebyševova nerovnost, že pravděpodobnost, že M_n se liší od h nejvýše o 5 cm s pravděpodobností alespoň 99%?

(c) Statistik si všimne, že všichni měření lidé mají výšku v intervalu $(1.4, 2.1)$. Jak má upravit odhad směrodatné odchylky? Jak se změní odpovědi na předchozí otázky?

7. Označme $S = \sum_{k=0}^{30} \binom{100}{k}$. Označme dále $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$, kde X_i je ± 1 s pravděpodobností 1/2 a veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé.

(a) Vyjádřete S pomocí pravděpodobnosti $P(X \leq x)$ pro vhodné x.
(b) Použijte CLV na odhad této pravděpodobnosti.
(c) Případně vyčíslete S vhodným softwarem a srovnejte.

Soupis vzorečků

- Vztah sdružené hustoty a sdružené distribuční funkce

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)dtds$$
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- Marginální hustota ze sdružené $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

- Nezávislost X, Y $\iff$ $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ $\iff$ $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx$
- Konvoluce: Nechť X, Y jsou spojité n.n.v. Pak $S = X+Y$ má hustotu $f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(s-x)dx$.
- Podmíněná hustota: pro n.v. X, Y: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$, pokud $f_Y(y) > 0$, jinak nedefinujeme.

K procvičení

8. Buďte $X, Y, Z \sim Exp(\lambda)$ nezávislé náhodně veličiny.
(a) Jaké je rozdělení $X+Y$? (b) Jaké je rozdělení $X+Y+Z$?

9. Metrový klacek rozlomíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem jedna stranami nějakého trojúhelníku.)
(a) Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.
(b) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.
(c) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.

10. Volme uniformně náhodně bod z trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0,0]$, $[0,1]$ a $[1,0]$, tj. pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu. Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.
(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
(b) Najděte marginální hustotu f_Y.
(c) Najděte podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.
(d) Spočtěte $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ a podle věty o rozboru možností spočtěte $\mathbb{E}(X)$ (pomocí $\mathbb{E}(Y)$).
(e) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí předchozí části a symetrie.