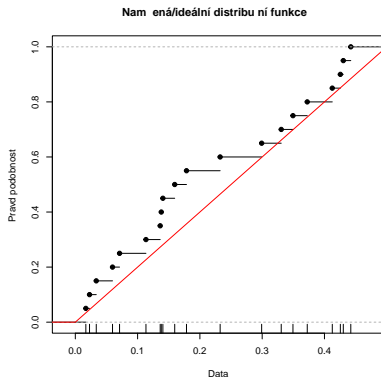
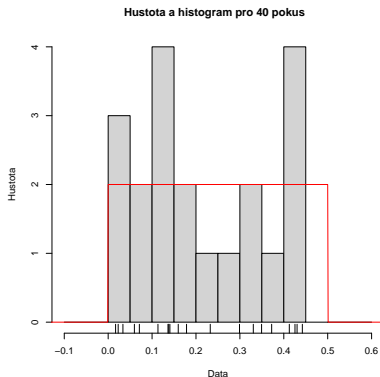


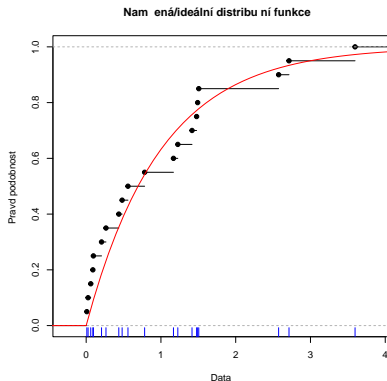
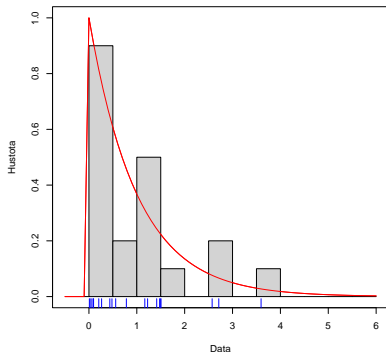
# Uniformní rozdělení

- ▶ N.v.  $X$  má uniformní rozdělení na intervalu  $[a, b]$ , píšeme  $X \sim U(a, b)$ , pokud  $f_X(x) = 1/(b - a)$  pro  $x \in [a, b]$  a  $f_X(x) = 0$  jinak.



# Exponenciální rozdělení

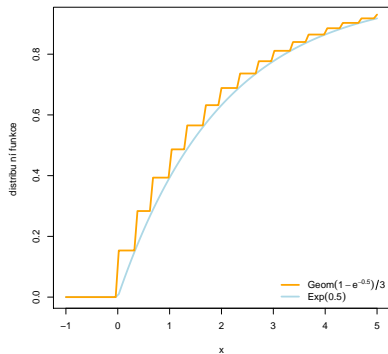
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$



- ▶  $X$  modeluje např. čas před příchodem dalšího telefonního hovoru do call-centra/dotazu na web-server/čas do dalšího blesku v bouři/rozpadu atomu/...

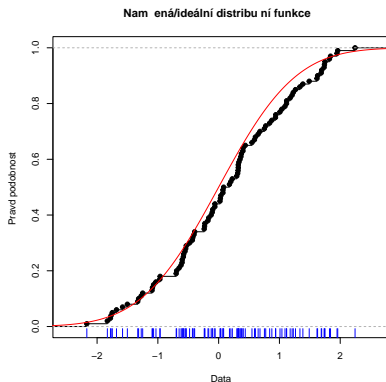
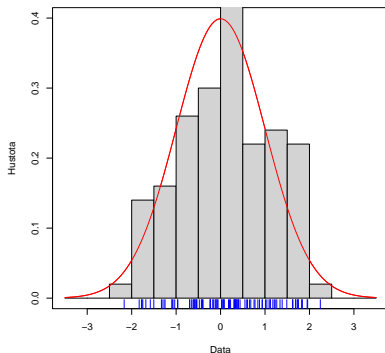
# Souvislost $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ a $Y \sim \text{Geom}(p)$

- ▶  $P(X > x) = e^{-\lambda x}$  pro  $x > 0$
- ▶  $P(Y > n) = (1 - p)^n$  pro  $n \in \mathbb{N}$



# Standardní normální rozdělení

- ▶  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$
- ▶  $\Phi(x)$  – primitivní funkce k  $\varphi$
- ▶ *Standardní normální rozdělení*  $N(0, 1)$  má hustotu  $\varphi$  a distribuční funkci  $\Phi$ .
- ▶ Pokud  $Z \sim N(0, 1)$ , tak  $\mathbb{E}(Z) = 0$ ,  $\text{var}(Z) = 1$



# Obecné normální rozdělení

- ▶ Pro  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  položme  $X = \mu + \sigma \cdot Z$ , kde  $Z \sim N(0, 1)$ .
- ▶ Píšeme  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  – obecné normální rozdělení.
- ▶ Normální rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$  má hustotu  $\frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ .

# Odolnost vůči součtu

- ▶ Pokud  $X_1, \dots, X_k$  jsou n.n.v., kde  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ , pak

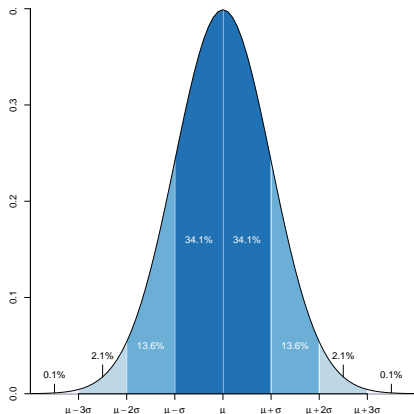
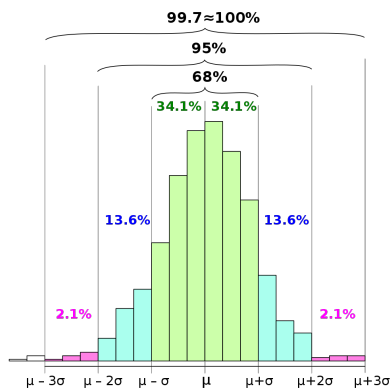
$$X_1 + \dots + X_k \sim N(\mu, \sigma^2),$$

kde  $\mu =$

$\sigma =$

# Normální rozdělení – klíčové vlastnosti

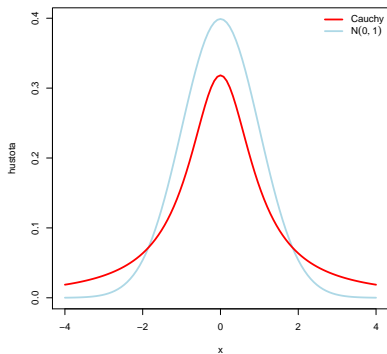
- ▶ Pravidlo  $3\sigma$  (68–95–99.7 rule)
- ▶ Centrální limitní věta



(Obrázek vlevo z Wikipedie, autor Melikamp.)

# Cauchyho rozdělení

- ▶ *Cauchyho rozdělení*: hustota  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$
- ▶ nemá střední hodnotu!!!





# Gamma rozdělení

- ▶  $Gamma(w, \lambda)$ , *gamma rozdělení s parametry*  $w > 0$  a  $\lambda > 0$  má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(w)} \lambda^w x^{w-1} e^{-\lambda x} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

kde  $\Gamma(w) = (w - 1)! = \int_0^\infty x^{w-1} e^{-x} dx$ .

- ▶ Pro  $w = 1$  dostáváme znovu exponenciální rozdělení.
- ▶ Pokud  $X_1, \dots, X_n$  jsou n.n.v. s rozdělením  $Exp(\lambda)$ , tak  $X_1 + \dots + X_n \sim Gamma(n, \lambda)$ .
- ▶ Modeluje mj. životnost součástky (s  $n$  částmi), souhrn dešťových srážek za rok, latenci webového serveru.

## A mnoho dalších

- ▶  $Beta(s, t)$  – beta rozdělení
- ▶  $\chi^2$  rozdělení s  $k$  stupni volnosti = chí-kvadrát ( $\chi_k^2$ ) je jiné jméno pro  $Gamma(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2})$ . Je to rozdělení  $Z_1^2 + \dots + Z_k^2$ , kde  $Z_i \sim N(0, 1)$  jsou n.n.v.
- ▶ Studentova  $t$ -distribuce
- ▶ atd. atd.

# Uniformní rozdělení

- ▶ N.v.  $X$  má uniformní rozdělení na intervalu  $[a, b]$ , píšeme  $X \sim U(a, b)$ , pokud  $f_X(x) = 1/(b - a)$  pro  $x \in [a, b]$  a  $f_X(x) = 0$  jinak.

# Universalita unif.

## Věta

*Nechť  $X$  je n.v. s distribuční funkcí  $F_X = F$ , nechť  $F$  je spojitá a rostoucí. Pak  $F(X) \sim U(0, 1)$ .*

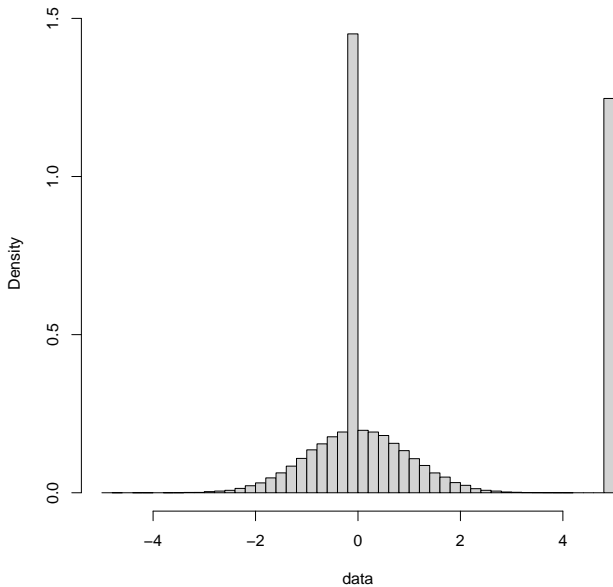
## Věta

*Nechť  $F$  je funkce „typu distribuční funkce“: neklesající zprava spojitá funkce s  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ . Nechť  $Q$  je odpovídající kvantilová funkce.*

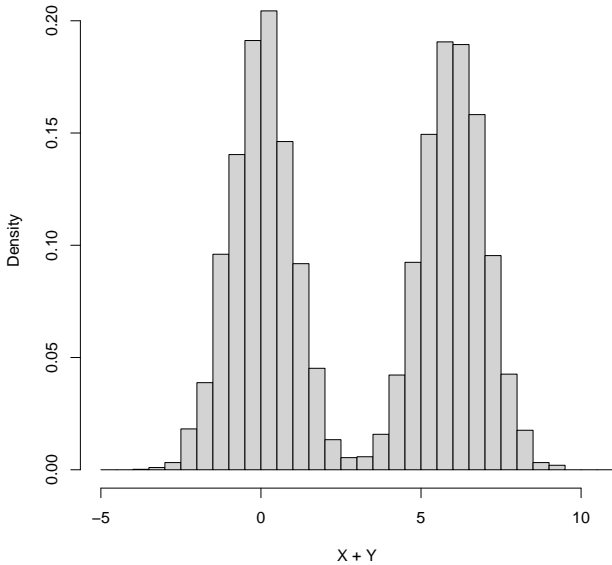
*Nechť  $U \sim U(0, 1)$  a  $X = Q(U)$ . Pak  $X$  má distribuční funkci  $F$ .*



Histogram of data



Histogram of X + Y



# Přehled

Náhodné vektory



# Sdružená distribuční funkce (Joint cdf)

## Definice

Pro n.v.  $X, Y$  na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  definujeme jejich sdruženou distribuční funkci (joint cdf)

$F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  předpisem

$$F_{X,Y}(x, y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x \& Y(\omega) \leq y\}).$$

- ▶ Mohli bychom definovat i pro více než dvě n.v.

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n).$$

- ▶ Můžeme odsud odvodit pravděpodobnost obdélníku:

$$P(X \in (a, b] \& Y \in (c, d]) =$$

## Sdružená hustota (Joint pdf)

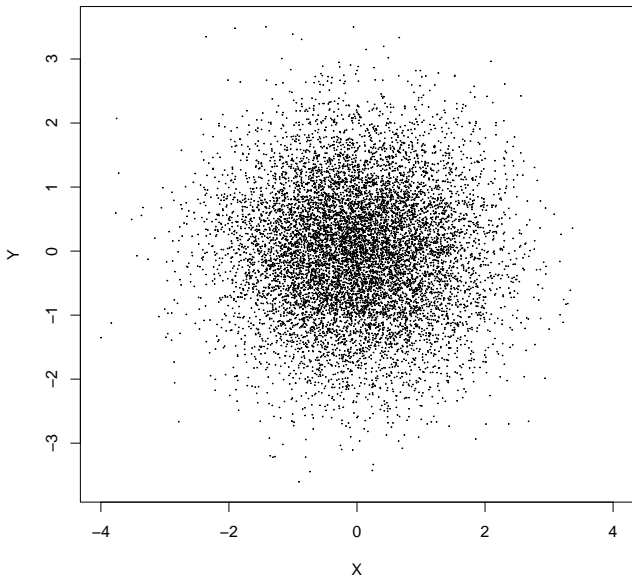
- ▶ Často můžeme sdruženou distribuční funkci psát jako integrál pomocí nezáporné funkce  $f_{X,Y}$

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

- ▶ Pak nazýváme n.v.  $X, Y$  sdruženě spojité. Funkce  $f_{X,Y}$  je jejich *sdružená hustota*.
- ▶ Jako u jednorozměrného případu může být  $f_{X,Y} > 1$ .
- ▶ Stejně jako u jednorozměrného případu můžeme pak pomocí hustoty vyjádřit i další pravděpodobnosti:

$$P((X, Y) \in S) = \int_S f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

- ▶  $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$



# LOTUS

- ▶ Stejně jako v diskrétním případě platí pro střední hodnotu funkce dvou n.v.

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

- ▶ A stejně jako v diskrétním případě odsud odvodíme  $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y) + c.$

# Vícerozměrné normální rozdělení