Jméno a příjmení:

1	2	3	4	5	6

1. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 25.5.2022

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejný papír!

Na vypracování máte **150 minut.**

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčíslujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701, $\Phi^{-1}(0.975)$ také nechte nevyčísleno.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat dnes osobně nebo zítra přes Zoom. Písemky psané přes Zoom znamenají nutnost ústní části i pro potvrzení známky z písemky.

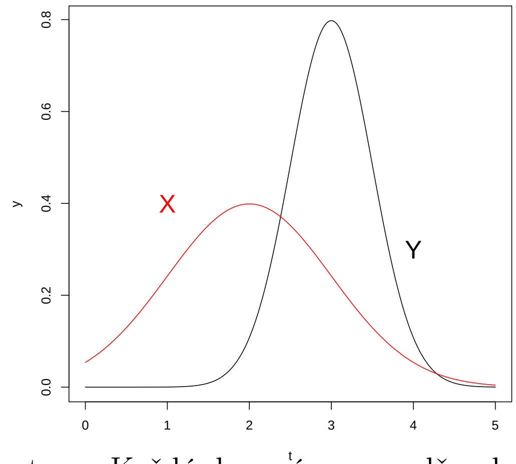
---

1. (10 bodů) Na obrázku jsou hustoty náhodných veličin X a Y. Rozhodněte, zda platí

(a) $\mathbb{E}(X) < \mathbb{E}(Y)$

(b) $\mathrm{var}(X) < \mathrm{var}(Y)$

(c) $X < Y$ skoro jistě (vysvětlete i, co tento výrok znamená)



2. (10 bodů) Jezdíme celý rok (250 dní) načerno metrem. Každý den máme pravděpodobnost $p = 0.02$, že potkáme revizora. Označme X počet setkání s revizorem během roku.

(a) Jaká je střední hodnota $\mathbb{E}(X)$?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že dostaneme přesně $\mathbb{E}(X)$ pokut? Napište přesný vzorec a odhadněte pomocí Poissonova rozdělení. (Ani v jednom případě nemusíte vyčíslovat.)

(c) Při každé kontrole se nad námi s pravděpodobností 1/3 revizor slituje a nechá nás jít bez pokuty. Označme Y počet dní, za které budeme platit pokutu. Určete $\mathbb{E}(Y)$, a $\mathrm{var}(Y)$.

3. (10 bodů) Nechť $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\mu)$ jsou nezávislé náhodné veličiny. (Předpokládejte $\lambda \neq \mu$.) Označme $Z = X + Y$.

(a) Určete hustotu n.v. Z.

(b) Určete střední hodnotu $\mathbb{E}(Z)$.

(c) Určete rozptyl $\mathrm{var}(Z)$.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem sdružená distribuční funkce.

Nechť $F = F_{X,Y}$ je sdružená distribuční funkce náhodných veličin X, Y. Nechť $F(1,1) = 0.6$, $F(0,1) = F(1,0) = 0.4$. Může být $F(0,0) = 0.1$? Jaká je nejmenší/největší možná hodnota $F(0,0)$?

(b) Definujte pojem rozptyl náhodné veličiny. Kdy je rozptyl roven 0?

5. (10 bodů) Vysvětlete, jak se provádí test dobré shody.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o celkové střední hodnotě (neboli o výpočtu střední hodnoty rozborem případů). Stačí varianta pro diskrétní náhodné veličiny.