3. cvičení z PSt — 1.3.2022

Bayesova věta

1. Máme tři normální hrací kostky a jednu kostku, kde jsou tři jedničky a tři dvojky. Vybereme uniformně náhodně jednu z kostek, hodíme a padne jednička. Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali normální kostku?

2. Petr dostává hodně emailů, ale 80 % z nich jsou spamy. Jeho spamový filtr 90 % spamů správně označí, ale také 5 % řádných emailů označí jako spam.
(a) Kolik procent emailů bude označeno jako spamy?
(b) Kolik procent řádných emailů je mezi těmi, co jsou označené jako spamy?
(c) Kolik procent spamů je mezi emaily, které testem prošly?

Nezávislé jevy

3. Pokud jsou jevy A, B nezávislé, tak jsou nezávislé i jevy A, B^c. A také jevy A^c, B^c.

4. Mohou být dva jevy nezávislé a zároveň disjunktní?

5. Najděte jevy A, B, C takové, že $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, ale jevy nejsou po dvou nezávislé.

Hrátky s náhodnými veličinami

6. Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu 1/10, pokusy jsou nezávislé. Skončí po prvním zásahu. Označme X celkový počet hodů.
(a) Jaká je $P(X > k)$?
(b) Jaká je distribuce X? Tj. určete pravděpodobnostní funkci p_X, tj. pro každé x určete $P(X = x)$.
(c) Jaká je $P(X \geq 10 \mid X \geq 5)$?

7. Pokračování z minulé úlohy: označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y.

8. Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost p, že se trefí. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z.

Bonus

9. Pokud vidíme bílého pudla, zvyšuje to naši důvěru, že je každá vrána černá?

10. (Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n rublů. Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

K procvičení

11. V truhle je sto mincí. Z nich 99 je normálních, ale jedna má na obou stranách orla. Vytáhneme náhodnou minci a šestkrát s ní hodíme, pokaždé padne orel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme si vytáhli „dvouorlovou“ minci? (Zkuste napřed odhadnout, pak spočítat.)

12. Na chorobu C máme dva testy, A a B. Test A má sensitivitu i specificitu $p = 0.95$. Test B vždy řekne, že pacient je zdravý. Předpokládejte, že $P(C) = 0.01$.
(a) Spočtěte pro oba testy pravděpodobnost úspěchu (tj. správné odpovědi), použijeme-li je na náhodného pacienta. Rozmyslete si, co to říká o užitečnosti obou testů.
(b) Pro jaké p je pravděpodobnost úspěchu obou testů stejná?

13. Ve volbách hlasují lidé pro dva kandidáty, A a B. Při odchodu z volební místnosti jsou voliči náhodně požádáni o účast v exit-poll. Předpokládejme, že kdo odpoví, odpoví popravdě koho volil, ale ne všichni se zúčastní. Označíme-li E množinu voličů, kteří se exit-pollu zúčastní, tak předpokládejme $P(E \mid A) = 0.7$ a $P(E \mid A^c) = 0.4$. Výsledky exit-pollu jsou 60 % pro A. Jaký je skutečný podíl lidí, kteří hlasovali pro A?

14. Kouřovými signály přenášíme binární soubor. Je proto poměrně vysoká pravděpodobnost chyby u každého bitu: 0 se jako 0 přenese jen s pravděpodobností 0.9, 1 jako 1 jen s pravděpodobností 0.8. Předpokládejme (trochu neseriózně), že jednotlivé znaky se přenáší nezávisle. Dále předpokládejme, že ve vysílané zprávě je stejně nul a jedniček.

(a) Pokud jsme dostali signál 0, jaká je pravděpodobnost, že byl opravdu vyslán?

(b) Dostali jsme zprávu 0010. Jaká je pravděpodobnost, že byla opravdu vyslána?

(c) Jak se výpočet změní, pokud budeme pro kontrolu vysílat každý symbol třikrát (a pak vezmeme častější z těch tří pokusů)?