Kombinatorika a grafy III – 2018/19
2.série

1. Dokažte, že pro každé kladná reálná čísla a a b tž. $b < 2$ existuje přirozené číslo k takové, že nějaký graf barevnosti alespoň ak^b neobsahuje podrozdělení K_k jako podgraf.

2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $k \geq 3$ existuje neprázdný graf G s alespoň $\frac{k^2}{16}|V(G)|$ hranami, který neobsahuje podrozdělení K_k jako podgraf.

3. Nechť G je graf, nechť $K \subseteq G$ je podrozdělení úplného grafu, nechť Q je množina větvicích vrcholů K (tj. vrcholů, jejichž stupeň v K je větší než 2), a nechť S je libovolná podmnožina vrcholů grafu G velikosti m. Nechť P je sjednocení m vrcholově disjunktních cest v G z S do Q, zvolené tak, že $|E(P) \setminus E(K)|$ je nejmenší možné. Ukažte, že platí následující: jestliže $q_1 \in Q$ není obsažen v P, $q_2 \in Q$ je obsažen v cestě P_2 v P, a R je cesta K spojující q_1 s q_2, pak $V(P) \cap V(R) \subseteq V(P_2)$, tj. P_2 je jediná cesta z P protínající R.

4. Z předchozího cvičení vyvoďte, že je-li graf $2k$-souvislý a obsahuje podrozdělení K_{3k}, pak každá podmnožina jeho vrcholů velikosti nejvýše $2k$ je linkovaná.

5. Nalezněte co nejmenší přirozené číslo k takové, že v každém nerovinném k-souvislém grafu je každá podmnožina jeho vrcholů velikosti 4 linkovaná.

6. Definujme, že graf G je *hranově k-linkovaný*, jestliže pro každých $2k$ navzájem různých vrcholů $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k$ v něm existují navzájem hranově disjunktní cesty $P_1, \ldots, P_k$, kde P_i spojuje s_i s t_i pro $i = 1, \ldots, k$. Ukažte, že každý hranově $2k$-souvislý graf je hranově k-linkovaný.

7. Nalezněte hranově 2-souvislý graf, který není hranově 2-linkovaný.

Nápověda 2: G lze zvolit jako úplný bipartitní graf.