Kombinatorika a grafy III – 2018/19
1.série

1. Uvažte postupně $k = 0, 1, 2,$ a 3. Je k-suma dvou rovinných grafů rovinný graf?
2. Pro přirozená čísla a a b zadefinujme $\mathcal{G}_{a,b}$ jako třídu všech grafů, které obsahují nejvýše a vrcholů stupně alespoň b. Pro které dvojice a, b je $\mathcal{G}_{a,b}$ uzavřená na minory?
3. Nalezněte množinu zakázaných minorů pro $\mathcal{G}_{1,3}$ – tj. takovou množinu $\mathcal{H}$, že graf G patří do $\mathcal{G}_{1,3}$ právě tehdy, když G neobsahuje jako minor žádný z grafů v $\mathcal{H}$.
4. Nechť G je souvislý graf neobsahující $K_{1,k}$ jako minor. Ukažte, že G obsahuje nejvýše $10k$ vrcholů stupně většího než 2.
5. Dokažte, že každý graf G s alespoň 4 vrcholy a alespoň $2|V(G)| - 2$ hranami obsahuje K_4 jako minor.
6. Dokažte, že každý graf G s alespoň 5 vrcholy a alespoň $3|V(G)| - 5$ hranami obsahuje K_5 jako minor.
7. Ukažte, že je-li G 3-souvislý graf obsahující podrozdělení K_5 jako podgraf, pak buď $G = K_5$ nebo G obsahuje podrozdělení $K_{3,3}$ jako podgraf.
8. S použitím výsledku předcházejícího cvičení a Kuratowského věty ukažte, že G neobsahuje $K_{3,3}$ jako minor právě tehdy, když G je (≤ 2)-suma kopií rovinných grafů a K_5.
9. S použitím výsledku předcházejícího cvičení ukažte, že každý graf minimálního stupně alespoň 6 obsahuje $K_{3,3}$ jako minor.
10. Ukažte, že pro $k \geq 3$ lze každý graf neobsahující K_k jako minor obarvit (ne nutně dobře) $k-1$ barvami tak, aby každá barva indukovala podgraf maximálního stupně nejvýše $3k - 7$.

Nápověda 4: uvažte kostru G s největším počtem listů.

Nápověda 7: nechť H je podrozdělení K_5 obsahující cestu $xv_1 \dots v_t y$, kde $\deg(x) = \deg(y) = 4$, $\deg(v_1) = \dots = \deg(v_t) = 2$ a $t \geq 1$. Je-li H podgraf G, pak jelikož $\{x, y\}$ není řez v G, musí G obsahovat cestu P z $\{v_1, \dots, v_t\}$ do zbytku H. Pak $H \cup P$ obsahuje podrozdělení $K_{3,3}$.