VZOR zkoušková písemka NMAI054 – ZS 2015/16

Na každý papír napište: číslo příkladu, jméno a paralelku: X (Salač) nebo Y (Šámal).

1. (5 bodů) Nechť posloupnost (a_n) je dána rekurentním předpisem $a_1 = 5/3$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{3}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Rozhodněte, zda existuje $\lim a_n$, a pokud ano, spočtěte ji.

2. (5 bodů) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log(1 + \tfrac{1}{n})\right)^c$$

v závislosti na parametru c (log značí přirozený logaritmus).

3. (10 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x + 1/x)\,.$$

---

4. (0 bodů) Vyslovte definici pojmu derivace funkce.

5L. (5 bodů) Vyslovte a dokažte větu o Cauchyho odmocninovém kritériu konvergence řad.

5T. (10 bodů) Vyslovte a dokažte Heineho větu.

6. (6 bodů) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Zdůvodněte!!

1. Nechť (a_n) je konvergentní posloupnost a (b_n) posloupnost, která nekonverguje. Pak posloupnost $(a_n + b_n)$ nemůže konvergovat.
2. Pokud je funkce f spojitá na intervalu $(0, 1]$, tak nabývá na tomto intervalu globálního maxima nebo minima.

Do bodového zisku se počítá lépe hodnocený příklad z 5L, 5T (důkazy vět).

Pro složení zkoušky je **nutné** mít správně odpovězenu otázku 4 (definice) a alespoň 60% ze zvoleného příkladu 5 (důkaz) – tj. důkaz může mít drobné závady, ale musí být jasná základní myšlenka a podstatné kroky v důkazu.

Na vypracování máte **150 minut.**

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, …(Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčíslujte je ($137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701).

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Řešení

1. (1 bodů) Označme $h(x) = (x^2 + 2)/3$, tj. platí $a_{n+1} = h(a_n)$. Napřed prozkoumejme monotonii posloupnosti (a_n). K tomu je potřeba zjistit, pro která x platí $h(x) < x$ (resp. $h(x) > x$). Protože $h(x) - x = (x^2 - 3x + 2)/3 = (x-1)(x-2)/3$, tak $h(x) < x$ pro $x \in (1, 2)$ a $h(x) \geq x$ pro ostatní x. Jelikož $a_1 = 5/3 \in (1, 2)$, tak platí $a_1 > a_2$ (to lze i podpořit výpočtem, ale přesná hodnota a_2 je ošklivá a nepotřebujeme ji). Ukážeme, že posloupnost je klesající: platí totiž, že pokud $x > 1$ tak $h(x) = (x^2 + 2)/3 > (1 + 2)/3 = 1$. Odsud snadnou indukcí získáme, že $a_n > 1$ pro všechna n a proto z předchozího víme (další indukce), že $a_{n+1} < a_n$ pro všechna n. Posloupnost (a_n) je tedy klesající, má tedy limitu – označme tuto limitu L. Protože $1 < a_n < 5/3$ pro všechna n, platí také $1 \leq L \leq 5/3$.

Jistě platí, že pokud $a_n \to L$, tak $a_{n+1} = h(a_n) = (a_n^2 + 2)/3 \to (L^2 + 2)/3 = h(L)$ (věta o aritmetice limit). Zároveň však $a_{n+1} \to L$, proto musí platit (díky jednoznačnosti limity) $L = h(L)$. Vyřešením kvadratické rovnice získáme dvě řešení $L \in \{1, 2\}$, jen jedno z nich však vyhovuje nerovnosti z minulého odstavce. Proto limita zadané posloupnosti je 1.

2. (2 bodů) Jedná se o řadu s kladnými členy, takže absolutní konvergence a konvergence splývají. Zkusíme danou řadu porovnat s nějakou známou řadou, nabízí se řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$. Použijeme limitní srovnávací kritérium. Vyčíslíme limitu

$$M = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\log(1 + \frac{1}{n})\right)^c}{1/n^c}.$$

Protože nám za chvíli vyjde, že $M = 1$, tak speciálně platí $0 < M < \infty$, a tedy řada zadaná a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$ buď obě konvergují nebo obě divergují. O druhé zmíněné řadě ale víme, že konverguje právě tehdy, když $c > 1$, tak i zadaná řada konveguje právě tehdy, když $c > 1$.

Zbývá vypočítat M. Z definice přirozeného logaritmu víme, že $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$. Z věty o limitě složené funkce (a spojitosti funkce $t \mapsto t^c$) zjistíme, že i $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^c = 1$. Použijeme Heineho větu a posloupnost $x_n = 1/n$, která konverguje k nule (ale nikdy se nule nerovná), tím zjistíme, že i zkoumaná limita M je rovna 1.

Kdybychom zapomněli $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, tak je to ostuda, ale jde postupovat i l'Hospitalovým pravidlem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

(jde o typ 0/0, takže pravidlo lze použít!). Oproti tomu použít l'Hospitalovo pravidlo rovnou na zadanou limitu vypadá na obtížné počítání s nejasným koncem.

3. (3 bodů) Výpočty a graf viz další strana (čtyřku v kroužku ignorujte). Shrnutí výsledků poté.

(4) $f = \operatorname{arctg}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$$f' = \frac{1}{1+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2-1}{x^2+(x^2+1)^2}$$

"$f'(0) = -1$"

$$f'' = \frac{2x\left(x^2+(x^2+1)^2\right) - (x^2-1)\left(2x + 2(x^2+1)\cdot 2x\right)}{(\quad)^2}$$

$$= \frac{1}{(\,)^2}\left(\cancel{2x^3} + 2x(x^2+1)^2 - \cancel{2x^3} + 2x + 4x(x^2+1) - 4x^3(x^2+1)\right)$$

$$= \frac{2x}{(\,)^2}\left((x^2+1)^2 + 1 + 2(x^2+1) - 2x^2(x^2+1)\right)$$

$$1 + (x^2+1)^2 + 2(1+x^2)(1-x^2)$$

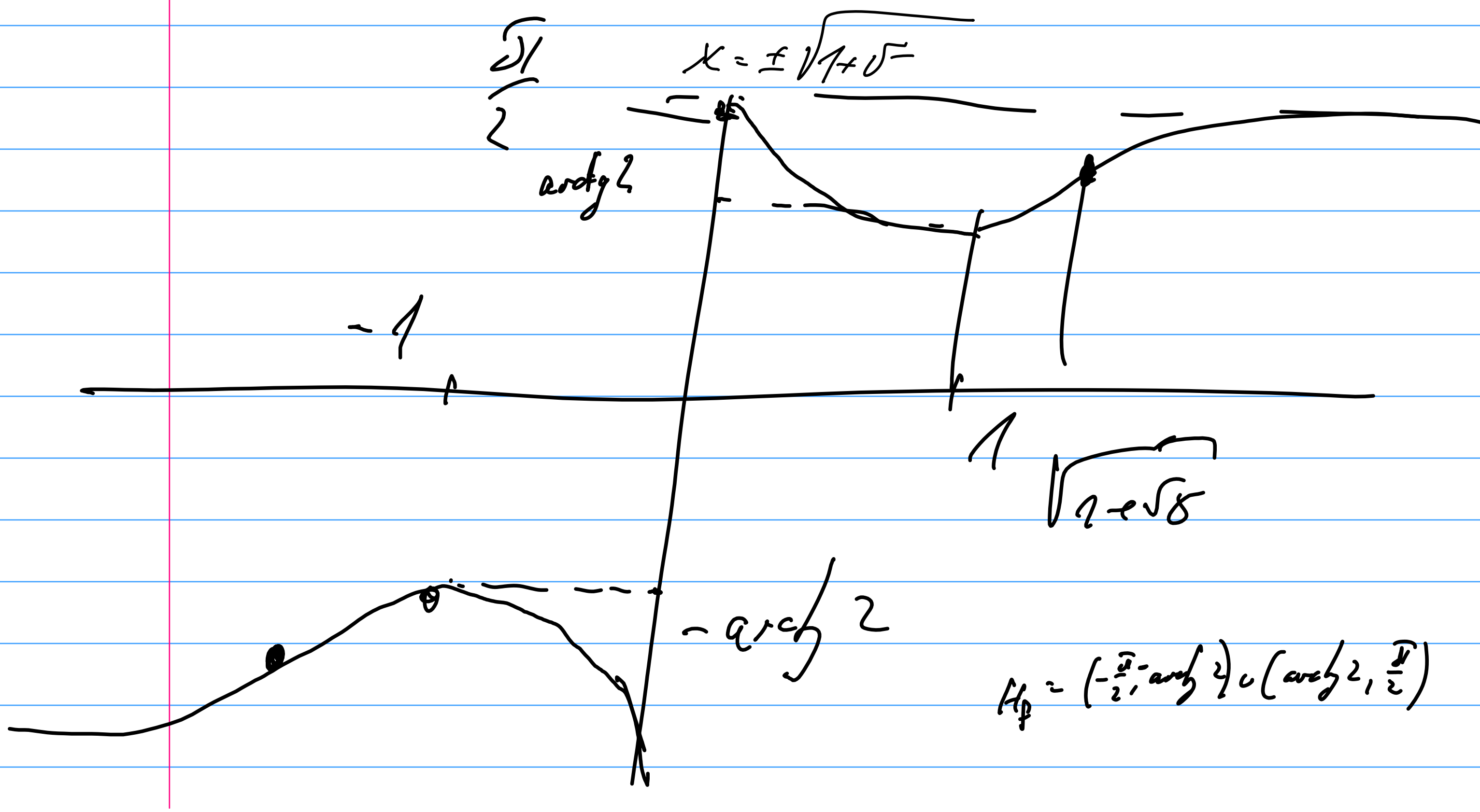
$$1 + x^4 + 2x^2 + 1 + 2 - 2x^4$$

$$\frac{2x\left(-x^4 + 2x^2 + 4\right)}{(\quad)^2} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{-2} = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{1+\sqrt{5}}$$



$$H_f = \left(-\frac{\pi}{2}, -\operatorname{arctg} 2\right) \cup \left(\operatorname{arctg} 2, \frac{\pi}{2}\right)$$

Funkce f je lichá, není periodická, je spojitá všude mimo $x = 0$, tam není ani definovaná.

Limita v nule zleva, zprava je rovna $\pi/2$, $-\pi/2$. Asymptoty v $\pm\infty$ jsou přímky $0x \pm \pi/2$.

Funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$. f je klesající na $(-1, 0)$ a na $(0, 1)$. V bodech ± 1 se nabývají lokální extrémy: lok. minimum $\operatorname{arctg} 2$ v 1 a lok. maximum $-\operatorname{arctg} 2$ v -1.

f je konvexní na $(0, \sqrt{1+\sqrt{5}})$ a $(-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{5}})$, konkávní na $(-\sqrt{1+\sqrt{5}}, 0)$ a $(\sqrt{1+\sqrt{5}}, \infty)$. Inflexní body $\pm\sqrt{1+\sqrt{5}}$. Obor hodnot je $H_f = (-\pi/2, -\operatorname{arctg} 2) \cup (\operatorname{arctg} 2, \pi/2)$. Globální extrémy funkce nemá.

4. (4 bodů) Derivace funkce f bodě a je rovna

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pokud tato limita existuje. Značíme $f'(a)$. (Bylo by vhodné nakreslit obrázek.)

5. (5 bodů) Viz přednáška nebo libovolná skripta/učebnice.

6. (6 bodů)

1. Platí. Důkaz sporem. Nechť $(c_n) = (a_n + b_n)$ a (a_n) obě konvergují. Pak $(c_n - a_n)$ také konverguje (věta o aritmetice limit). Nicméně $c_n - a_n = b_n$, takže posloupnost (b_n) má konvergovat i nekonvergovat. Spor.

2. Neplatí. Protipříklad je například funkce $f(x) = \frac{1}{x}\sin(1/x)$. Tato funkce je na $(0, 1]$ definovaná a spojitá (jde o složení spojitých funkcí). Nicméně pro body $x_k = \frac{1}{\pi/2 + 2k\pi}$ je $f(x_k) = 1/x_k \to \infty$, naopak hodnoty v bodech $y_k = -\pi/2 + 2k\pi$ se blíží $-\infty$. Funkce tedy na zadaném intervalu není omezená shora ani zdola, nemůže tedy nabývat maxima ani minima. Viz též obrázek.