PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA 2
ZS 2013/14 soubor úloh č. 3

(**4.1.2014** nápověda, **9.1.2014** řešení)

Zápočet: $\geq$ 36 b, zkouška: $\geq$ 60 b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen 2/3 bodů.

Napřed nebodované lehké úlohy k zamyšlení, pro lepší vychutnání přednášky:

- Buďte X, A množiny. Nechť pro každé $a \in A$ je d_a metrika na X. Pak funkce $(x, y) \mapsto \max_{a\in A} d_a(x, y)$ je také metrika. (Obdobnou funkci jsme použili v důkazu Talagrandovy nerovnosti.)
- Z Azumovy nerovnosti plyne Černovova.
- Z Talagrandovy nerovnosti také, ale s horšími konstantami.
- Pro každý martingal $X_0, \ldots, X_m$ platí pro všechna $0 \leq i \leq j \leq m$ vztah $\mathbb{E}[X_j \mid X_i] = X_i$ (*). Opačný směr neplatí: existuje posloupnost náhodných veličin $X_0, \ldots, X_m$, která splňuje $(*)$, ale netvoří martingal.

1. Buď X jako v Talagrandově nerovnosti: náhodná veličina na $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$, která je Lipschitzovská a r-certifikovatelná. Na přednášce jsme dokázali, že

   $$\Pr[X \leq m - t\sqrt{rm}] \leq 2e^{-t^2/4}\,.$$

   Ukažte analogický odhad pro pravděpodobnost, že $X \geq m + t\sqrt{rm}$. **2**

2. Dokažte, že na přednášce definovaný Doobův martingal (X_i) je opravdu martingal.

   Podrobněji: Buď $\Omega = A^B$ prostor funkcí, kde hodnoty funkce v jednotlivých bodech B se volí nezávisle náhodně (a pravděpodobnost, že $g(b) = a$ je nějaká konstanta p_{ab}). Zvolme libovolně *gradaci* $\emptyset = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_m = B$. Definujeme $g \sim_i g'$ pokud pro všechna $b \in B_i$ je $g(b) = g'(b)$. Mějme libovolnou náhodnou veličinu L na Ω. Položíme

   $$X_i(g) = \mathop{\mathbb{E}}_{g\in\Omega}[L(g')|g \sim_i g']\,.$$

   Ukažte, že $X_0, \ldots, X_m$ je martingal. **4**

3. Hodíme n-krát mincí. V prvním kroku použijeme minci spravedlivou. Pokud v i-tém kroku padne panna, použijeme v $(i + 1)$-ním kroku minci, na níž padá panna ve 2/3 případů. Pokud v i-tém padne orel, tak v příštím kroku bude pravděpodobnost orla 2/3. Buď X počet hodů, kdy padl orel. Použijte Azumovu nerovnost na důkaz koncentrace X okolo střední hodnoty. **2**

   Lze použít také Talagrandovu nerovnost? **1**

4. V nádobě je n míčků, z čehož je m červených. Náhodně vytahujeme míčky a zahazujeme; přitom sledujeme podíl počtu červených ku počtu všech míčků. Ukažte, že (náhodná) posloupnost těchto podílů tvoří martingal. Co říká Azumova nerovnost? **2**

5. Buď G graf s vrcholy $\mathbb{Z}_7^n$, kde hrany jsou tvořeny dvěma n-ticemi, které se liší právě v jedné souřadnici. Buď U množina vrcholů velikosti 7^{n-1}. Buď W množina vrcholů, jejichž (grafová) vzdálenost od U je více než $(c+2)\sqrt{n}$ ($c > 0$ je konstanta). Dokažte, že $|W| \leq 7^n e^{-c^2/2}$. **3**

6. Buď G graf s barevností rovnou 1000. Buď U náhodná podmnožina vrcholů (každý vrchol si nezávisle náhodně s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ vybere, zda patří do U). Dokažte, že

$$\Pr[\chi(G[U]) \leq 400] < \frac{1}{100}\,.$$

6

1 Analogicky jako na přednášce. V jednom místě vám to vyjde trochu netěsně (odhad by šel zlepšit), tak se nedivte (a případně podumejte, jak by se dal zlepšit).

2 Snadné je dokázat, že $\mathbb{E}[X_{i+1}(g') \mid g' \sim_i g] = X_i(g)$. Pak si uvědomte, že to už stačí.

3 Ukažte, že pro přirozeně definovaný Doobův martingal platí $|X_{i+1} - X_i| \leq 3$. K tomu stačí sestavit rekurzi pro x_k = střední hodnota počtu orlů, pokud máme k hodů a začínáme s mincí co fandí orlům. Rekurzi nemusíte řešit, ale použit pro důkaz toho, že $x_k - k/2$ je malé.

4 Přímo podle definice.

5 Použijte Doobův martingal a podobný trik jako v posledním příkladu na předvánoční přednášce – užít Azumovu nerovnost dvakrát.

6 Užijte Azumovu nerovnost: postupně pro všechny vrcholy G odhalujte, zda jsou prvky U. Nelze to ale dělat po jednotlivých vrcholech (proč?). Vytvořte vhodnou gradaci s 1000 kroky použitím barevnosti G. Zbývá odhadnout střední hodnotu $\chi(G[U])$. K tomu poslouží snadná kombinatorická úvaha: kolik je $\chi(G \cup H)$ pro G, H disjunktní?