Kombinatorické etudy 6 – LS 2013/2014

1. (3.19) Kolik je permutací $\{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že pro žádnou trojici indexů $i < j < k$ neplatí $\pi(j) < \pi(i) < \pi(k)$?

2. (4.24) Buď B antisymetrická matice ($A^T = -A$). Pak $\det B = (\mathrm{Pf}\, B)^2$.
Pfafián antisymetrické matice je definován jako

$$\frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in S_{2n}} \mathrm{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(2i-1),\pi(2i)} \,.$$

3. (9.27 – ještě zkuste b-čko z minule)

(b) * Sestrojte graf s barevností k bez 3-, 4- a 5-cyklů.

4. (9.28) Buďte $I_1, \ldots, I_n$ uzavřené intervaly na přímce. Definujeme graf s vrcholy $[n]$, kde ij tvoří hranu právě tehdy, když $I_i \cap I_j \neq \emptyset$.

(a) Ukažte, že výsledný graf G splňuje $\chi(G) = \omega(G)$.

(b) Ukažte, že $\bar{G}$ (doplněk grafu G) splňuje $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$.

(c) Ukažte, že každý cyklus v G o délce větší než 3 má tětivu (tj. není to indukovaný podgraf).

5. (10.35) Buď G graf neobsahující K_{k+1}. Ukažte, že existuje k-barevný graf H s vrcholy $V(G)$ takový, že každý $v \in V(G)$ splňuje $\deg_H(v) \geq \deg_G(v)$. Odvoďte odsud Turánovu větu.

6. (14.14 – zůstalo z minula, už umíme dokázat první část z nápovědy)*

(a) Mějme opět obarveny k barvami všechny podmnožiny n-prvkové množiny S, přičemž $n \geq N(k,t)$. Ukažte, že existují disjunktní množiny $A_1, B_1, \ldots, A_t, B_t$ takové, že pro libovolnou pevnou posloupnost $1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq t$ všechna sjednocení ve tvaru $C_{i_1} \cup \cdots \cup C_{i_\ell}$ (kde každé C_i je jedno z A_i, B_i nebo $A_i \cup B_i$) mají stejnou barvu.

(b) Dokažte, že pro libovolná k, r existuje $n = n(k,r)$ s následující vlastností: kdykoli je množina všech podmnožin n-prvkové množiny S obarvena k barvami, tak existují neprázdné disjunktní množiny $X_1, \ldots, X_r \subseteq S$ takové, že všechna neprázdná sjednocení některých z nich mají tutéž barvu.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`