

## Kombinatorické etudy 3 – LS 2013/2014

**1.** (3.16 – zůstalo z minula, rozepište si malé případy! – zkuste taky najít zobrazení permutace z  $S_n$  do permutace z  $S_{n-1}$ , které zachovává prvních  $n - 1$  čísel  $I_i$ )

Bud'  $\pi$  náhodná permutace  $[n]$ . Označme  $I_i$  počet indexů  $1 \leq j \leq i$ , pro něž  $\pi(i) \leq \pi(j)$ . Pak  $I_1, \dots, I_n$  jsou náhodné veličiny. Ukažte, že jsou nezávislé.

**2.** (4.23) Bud'  $M$  perfektní párování v grafu  $K_{n,n}$ . Kolik je perfektních párování v grafu  $K_{n,n} - M$ ?

(Tj. kolika způsoby lze rozdělit  $n$  manželských dvojic do tanečních párů tak, aby nikdo nebyl v páru se svým partnerem?)

**3.** (9.25 – zbylý případ)

Jaká je barevnost

(c) hranového grafu pro symetricky orientovaný graf vzniklý z  $K_n$  nahrazením každé hrany orientovaným dvojcyklem.

Pokud  $G = (V, E)$  je neorientovaný graf, tak hranový graf  $L(G)$  má vrcholy  $E$  a hrany  $\{e, f\}$  kdykoli  $e$  a  $f$  mají společný vrchol. Pro orientovaný graf  $G = (V, E)$  má  $L(G)$  také vrcholy  $E$ , orientované hrany však vedou jen z  $(u, v)$  do  $(v, w)$  (tj. závisí na orientaci). Pro účely barevnosti orientace nehraje roli.

**4.** (10.32) Označme  $t(G)$  počet trojúhelníků v grafu  $G$ .

- Pokud  $G$  je  $k$ -regulární graf s  $n$  vrcholy, dokažte, že

$$t(G) + t(\overline{G}) = \binom{n}{3} - \frac{n}{2}k(n - k - 1).$$

- Pro libovolný graf  $G$  s  $n$  vrcholy platí, že

$$t(G) + t(\overline{G}) \geq \frac{n(n-1)(n-5)}{24}.$$

**5.** (14.13) Obarvěme všechny neprázdné podmnožiny  $n$ -prvkové množiny pomocí  $k$  barev. Ukažte, že pokud je  $n$  dostatečně velké, tak existují dvě disjunktní neprázdné množiny  $X, Y$ , že  $X, Y$  a  $X \cup Y$  mají stejnou barvu.

Nápověda na: <http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/>