Kombinatorické etudy 2 – LS 2013/2014

1. (3.16 – zůstalo z minula, rozepište si malé případy!) Buď π náhodná permutace $[n]$. Označme I_i počet indexů $1 \leq j \leq i$, pro něž $\pi(i) \leq \pi(j)$. Pak $I_1, \ldots, I_n$ jsou náhodné veličiny. Ukažte, že jsou nezávislé.

2. (4.22) Žebřík Z_n je graf s $2n$ vrcholy: dvě cesty délky $n-1$ a párování mezi nimi (první s prvním, druhý s druhým, ...). Určete, kolik má Z_n perfektních párování.

3. (9.25 – zbývá (c) a (a) pro sudá n)
Jaká je barevnost

(a) $L(K_n)$ – tj. hranového grafu K_n

(b) jeho doplňku

(c) hranového grafu pro symetricky orientovaný graf vzniklý z K_n nahrazením každé hrany orientovaným dvojcyklem.

Pokud $G = (V, E)$ je neorientovaný graf, tak hranový graf $L(G)$ má vrcholy E a hrany $\{e, f\}$ kdykoli e a f mají společný vrchol. Orientovaný graf $G = (V, E)$ má také vrcholy E, orientované hrany však vedou jen z (u, v) do (v, w) (tj. závisí na orientaci).

Pro účely barevnosti orientace nehraje roli.

4. (10.31) Buď G graf bez trojúhelníků, $\alpha(G)$ velikost jeho největší nezávislé množiny, $\tau(G)$ minimální vrcholové pokrytí (množina vrcholů, které se dotýkají každé z hran). Dokažte, že

$$|E(G)| \leq \alpha(G)\tau(G).$$

Odvoďte odsud tvrzení z minulé série.

5. (14.12) Pro každé k a r existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ a libovolné k-obarvení čísel $\{1, \ldots, n\}$ existuje v jedné z barev r-rozměrný kvádr. Tím kvádrem rozumíme množinu 2^r čísel danou parametry a, $d_1, \ldots, d_r$. Kvádr obsahuje všechna čísla

$$\{a + \sum_i c_i d_i : c_1, \ldots, c_r \in \{0, 1\}\},$$

přičemž požadujeme, aby celý kvádr ležel v $\{1, \ldots, n\}$.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`