Kombinatorické etudy 10 – LS 2013/2014

1. (3.21) Podél závodní trati (uzavřená křivka) je několik nádob s benzínem. Celkové množství benzínu přesně vystačí našemu autu na objetí trati. Dokažte, že když auto začne s prázdnou nádrží u jedné z nádob (vhodně vybrané), tak může celou trať objet. (Nádrž má dostatečně velký objem.)

2. (4.28)

Určete počet perfektních párování žebříku Z_n (definovaného v druhé sadě úloh). Pokud možno pomocí Pfafiánu.

3. (9.33) Které z předchozích úloh na tomto místě popisují konstrukci perfektních grafy? (Graf G je perfektní, pokud pro každý indukovaný podgraf H platí, že $\chi(H) = \omega(H)$.)

4. (10.35) Buď G graf neobsahující K_{k+1}. Ukažte, že existuje k-barevný graf H s vrcholy $V(G)$ takový, že každý $v \in V(G)$ splňuje $\deg_H(v) \geq \deg_G(v)$. Odvoďte odsud Turánovu větu.

5. (14.14 – už to skoro máme!)*

(a) Mějme opět obarveny k barvami všechny podmnožiny n-prvkové množiny S, přičemž $n \geq N(k, t)$. Ukažte, že existují disjunktní množiny $A_1, B_1, \ldots, A_t, B_t$ takové, že pro libovolnou pevnou posloupnost $1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq t$ všechna sjednocení ve tvaru $C_{i_1} \cup \cdots \cup C_{i_\ell}$ (kde každé C_i je jedno z A_i, B_i nebo $A_i \cup B_i$) mají stejnou barvu.

(b) Dokažte, že pro libovolná k, r existuje $n = n(k, r)$ s následující vlastností: kdykoli je množina všech podmnožin n-prvkové množiny S obarvena k barvami, tak existují neprázdné disjunktní množiny $X_1, \ldots, X_r \subseteq S$ takové, že všechna neprázdná sjednocení některých z nich mají tutéž barvu.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`