Kombinatorické etudy 8 – ZS 2012/2013

1. (1.30) Kolik posloupností délky n lze sestavit z písmen a, b, c, d, pokud nesmí být nikde a vedle b?

2. (4.11) Určete počet koster grafu G, kde G je

1. doplněk párování: grafu s q nezávislými hranami a $n-2q$ izolovanými vrcholy
2. doplněk hvězdičky: grafu s q hranami sousedícími s jediným vrcholem a $n-q-1$ izolovanými vrcholy

Můžete použít determinantovou metodu, nebo také následující vzorec. Označíme $T(G)$ počet koster grafu G. Pak platí

$$T(G) = \sum (-1)^{n-r} T(\bar{G}[X_1]) \dots T(\bar{G}[X_r]) |X_1| \dots |X_r| n^{r-2}$$

přičemž $\bar{G}[X_i]$ značí doplněk grafu G indukovaného vrcholy X_i, a sčítání probíhá přes všechny rozklady $(X_1, \dots, X_r$ množiny $V(G)$, a $n = |V(G)|$.

3. (7.6) (a) Buď G bipartitní graf s partitami A, B, a buď $k \geq 0$ celé číslo pro které

$$|N_G(X)| \geq |X| + k$$

platí pro všechny neprázdné množiny $X \subseteq A$. Buďte X_1, X_2 dvě množiny pro které v této nerovnosti nastává rovnost. Ukažte, že pokud $X_1 \cap X_2$ je neprázdná, tak pro ni také nastává rovnost.

(b) Ukažte, že graf G z části (a) má podgraf G' obsahující A, pro který

- $\deg_{G'} x = k + 1$ pro všechny $x \in A$ a
- $|N_{G'}(X)| \geq |X| + k$ pro všechny neprázdné $X \subseteq A$.

4. (8.12) Graf G nazveme α-kritický, pokud $\alpha(G - e) > \alpha(G)$ pro všechny jeho hrany e.

Buď G nějaký α-kritický graf bez izolovaných vrcholů. Ukažte, že každý vrchol je obsažen v nějaké maximální nezávislé množině, ale ne ve všech.

Pokud x, y jsou vrcholy G, které netvoří komponentu souvislosti, tak existuje maximální nezávislá množina, která obsahuje právě jeden vrchol z x, y.

Pokud x, y jsou sousední (a netvoří komponentu), tak existuje maximální nezávislá množina, která neobsahuje žádný z nich.

5. (13.37*) Matici nazveme *totálně unimodulární*, pokud každá čtvercová podmatice má determinant 0 nebo ± 1. Matice incidence hypergrafu je definována jako u grafu: na pozici (i, j) je 1 pokud je i-tý vrchol v j-té hraně, a jinak je tam 0.

Ukažte, že hypergraf H má totálně unimodulární matici incidence, právě tehdy když každý podhypergraf H_W má dvojobarvení, ve kterém je každá hrana skoro rozpůlena: Pokud označíme množiny vrcholů s barvou i jako A_i ($i = 0, 1$), tak pro každou hranu $e \in E(H)$ platí $\lfloor |e|/2 \rfloor \leq |e \cap A_1| \leq \lceil |e|/2 \rceil$.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`