Kombinatorické etudy 7 – ZS 2012/2013

1. (1.29) Určete vlastní čísla matice $n \times n$, která má všude nuly, kromě políček těsně nad a těsně pod diagonálou. Tj. $A_{i,j} = 1$ právě když $|i - j| = 1$, jinak $A_{i,j} = 0$.

2. (4.11) Kolik je stromů s vrcholy $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$, kde každá hrana vede mezi nějakým v_i a nějakým w_j.

3. (7.6) (a) Buď G bipartitní graf s partitami A, B, a buď $k \geq 0$ celé číslo pro které

$$|N_G(X)| \geq |X| + k$$

platí pro všechny neprázdné množiny $X \subseteq A$. Buďte X_1, X_2 dvě množiny pro které v této nerovnosti nastává rovnost. Ukažte, že pokud $X_1 \cap X_2$ je neprázdná, tak pro ni také nastává rovnost.

(b) Ukažte, že graf G z části (a) má podgraf G' obsahující A, pro který

- $\deg_{G'} x = k + 1$ pro všechny $x \in A$ a
- $|N_{G'}(X)| \geq |X| + k$ pro všechny neprázdné $X \subseteq A$.

4. (8.12) Graf G nazveme α-kritický, pokud $\alpha(G - e) > \alpha(G)$ pro všechny jeho hrany e.

Buď G nějaký α-kritický graf bez izolovaných vrcholů. Ukažte, že každý vrchol je obsažen v nějaké maximální nezávislé množině, ale ne ve všech.

Pokud x, y jsou vrcholy G, které netvoří komponentu souvislosti, tak existuje maximální nezávislá množina, která obsahuje právě jeden vrchol z x, y.

Pokud x, y jsou sousední, tak existuje maximální nezávislá množina, která neobsahuje žádný z nich.

5. (13.36) Buď H 3-uniformní hypergraf s $n \geq 5$ vrcholy, kde každá dvojice vrcholů je obsažena ve stejném, nenulovém počtu hran. Ukažte, že H není 2-obarvitelný.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`