Kombinatorické etudy 3 – ZS 2012/2013

1. (1.37) Chceme rozlámat tabulku čokolády $1 \times n$ čtverečků na jednotkové čtverečky. Kolika způsoby to lze učinit, pokud

1. v každém tahu rozlomíme jeden nejednotkový dílek na dva?
2. v každém tahu rozlomíme všechny nejednotkové dílky na dva?

2. (4.4) Jsou-li $T_1, \ldots, T_r$ disjunktní stromy, tak počet stromů, které obsahují každý ze stromů T_i, ale žádné nové vrcholy, je $|V(T_1)| \ldots |V(T_r)| \big(|V(T_1) + \cdots + V(T_r)|\big)^{r-2}$.

3. (7.2) (zůstalo z minula)

Buď G bipartitní graf. Pak $\nu(G) = \tau(G)$ a $\rho(G) = \alpha(G)$. Zde $\nu(G)$ je velikost největšího párování, $\alpha(G)$ velikost největší nezávislé množiny, $\rho(G)$ je minimální počet hran, které pokrývají všechny vrcholy (hranové pokrytí), a konečně $\tau(G)$ minimální počet vrcholů, které protínají všechny hrany (vrcholové pokrytí – transversála).

4. (8.8) Uvažme digraf G, budeme na něm hrát hru: první hráč obsadí vrchol společnou figurkou, pak se hráči střídají v tazích, přičemž jeden tah spočívá v přesunu figurky po hraně na nový vrchol, **který dosud nebyl navštíven**. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

1. Pokud G nemá cykly, tak první hráč má vyhrávající stragegii. Určete **všechny** jeho možné první tahy.
2. Nechť nyní G má cykly, ale má zdroj (vrchol se vstupním stupněm 0). Ukažte, že první hráč má stále vyhrávající strategii.
3. Pro libovolný digraf G ukažte, že druhý hráč vyhraje, právě tehdy, když vyhraje na každé silně souvislé komponentě G.

5. (13.35) Popište všechny hypergrafy, ve kterých každé dvě hrany mají přesně jeden společný bod, a které nejsou 2-obarvitelné.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`