Kombinatorické etudy 2 – LS 2012/2013

1. (1.6 – zbylo z minula, část (a) už umíme) Stirlingovo rozkladové číslo $\left\{ n \atop k \right\}$ (též $S(n,k)$, Stirlingovo číslo druhého druhu) značí počet rozkladů množiny $\{1,\ldots,n\}$ na k neprázdných množin; jinak řečeno, je to počet ekvivalencí na n-prvkové množině s k třídami ekvivalence.

Stirlingovo permutační číslo $\left[n \atop k \right]$ značí počet permutací množiny $\{1,\ldots,n\}$ s právě k cykly. (Jako Stirlingovo číslo prvního druhu se označuje $s(n,k) = (-1)^{n-k}\left[n \atop k \right]$.)

(a) Najděte rekurentní relaci pro $\left\{ n \atop k \right\}$ i pro $\left[n \atop k \right]$, a sestavte jejich tabulku pro $n \le 6$.

(b) Dokažte, že $\left\{ n \atop n-k \right\}$ i $\left[n \atop n-k \right]$ jsou pro pevné k polynomy v n.

(c) Ukažte, že rekurence z části (a) definuje jednoznačně Stirlingova čísla pro všechna *celá* n, k, zadáme-li počáteční podmínky $\left[0 \atop 0 \right] = \left[0 \atop 0 \right] = 1$ a $\left\{ 0 \atop m \right\} = \left[m \atop 0 \right] = 0$ (pro $m \ne 0$).

(d) Dokažte vztah

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left[-k \atop -n \right].$$

2. (3.4) Zvolíme náhodnou permutaci čísel 1, 2, ..., n. Jaká je pravděpodobnost, že 1 a 2 jsou ve stejném cyklu?

(Taky můžete ještě hledat jiný důkaz úlohy z minula.)

3. (5.5) Orientovaný graf G nazveme hezký, pokud jeho vrcholy lze obarvit dvěma barvami tak, že z každého vrcholu vede hrana do nějakého vrcholu opačné barvy. Ukažte, že silně souvislý orientovaný graf je hezký, právě když obsahuje sudý cyklus.

4. (6.3) Mějme graf G se skóre $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$. Předpokládejme, že $d_k \ge k$ pro všechna $k \le n - d_n - 1$. Pak je G souvislý.

5. (11.1 – zbylo z minula, zatím známe vlastní čísla K_n) Vlastní číslo a vektor grafu G znamená vlastní číslo a vektor matice sousednosti A_G. Některé vlastnosti grafu lze z vyčíst z jeho vlastních čísel, začneme ale opatrně:

Určete vlastní čísla a vlastní vektory úplného grafu K_n, hvězdy S_n, úplného bipartitního grafu $K_{m,n}$ a cyklu C_n.

6. (7.22) Buď G graf s $2n$ vrcholy a všemi stupni alespoň n. Ukažte, že G má perfektní párování.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`