Kombinatorické etudy 9 – ZS 2011/2012

1. (4.3) Označme
$$p_n(x_1,\dots,x_n) = \sum_T \prod_i x_i^{\deg_T(v_i)-1}\,,$$
kde sčítání probíhá přes všechny stromy T s danou množinou vrcholů. Odvoďte (bez použití předchozích částí), že $p_n(x_1,\dots,x_n) = (x_1+\dots+x_n)^{n-2}$. Z toho odvoďte Cayleyho formuli pro počet stromů na n vrcholech.

$\to$ Ukázali jsme si, že rovnost platí, když je jedna z proměnných rovna nule. Jeden ze způsobů, jak odsud ukázat, že se rovnají všude, je naznačen v nápovědě. Nicméně, zkuste popřemýšlet i o jiných, obecně: co lze říci o nulových bodech polynomu více proměnných!

Blízko k tématu jsou také Hilbert Nullstellensatz a Combinatorial Nullstellensatz. Možná nepomůžou, ale zkuste si je najít.

2. (6.36) Buď G kriticky 2-souvislý graf. (To znamená graf, který je vrcholově 2-souvislý, ale po odebrání libovolné hrany takovým být přestane.) Ukažte, že každá kružnice obsahuje vrchol stupně 2.

3. (9.24) Buď G kriticky $(k+1)$-barevný graf. Ukažte, že každá dvojice nesousedících vrcholů jde spojit $k-1$ hranově disjunktními sudými cestami, z nichž žádná nemá tětivu. (Neboli, tyto cesty jsou indukovaný podgraf G.)

4. (11.38)

(a) Střední doba návratu z u zpět do u je $\frac{2m}{\deg u}$.

(b) Střední počet kroků, než se náhodná procházka z u vrátí zpět do u jednou konkrétní hranou je $2m$.

5. (14.26) (a) Nechť $f : \{1,2,\dots,2^{n-1}\} \to \mathbb{Z}$ je funkce splňující $1 \le f(i) \le i$ pro každé i. Dokažte, že existuje n čísel $1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_n \le 2^{n-1}$ pro něž
$$f(a_1) \le \dots \le f(a_n)\,.$$

(b) Část (a) neplatí, pokud se konstanta 2^{n-1} sníží o 1.

6. Každá z $n \ge 4$ drben zná jeden drb, který nikdo jiný nezná. Mluví spolu jen po telefonu a při každém hovoru si navzájem sdělí všechny drby, které znají. Ukažte, že je potřeba alespoň $2n-4$ hovorů, než všechny vědí všechno.

7. Bonus. Buď $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ funkce taková, že každá funkční hodnota je průměr hodnot sousedů:
$$f(x,y) = \frac{f(x-1,y)+f(x+1,y)+f(x,y-1)+f(x,y+1)}{4}\,.$$
Nechť je navíc f shora omezená. Ukažte, že je konstantní.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`