Kombinatorické etudy 5 – ZS 2011/2012

1. (4.1) Mějme vrcholy $v_1, \ldots, v_n$, předepíšeme stupně d_i jednotlivých vrcholům tak, že $\sum_{i=1}^n d_i = 2n-2$ a $d_i \geq 1$ pro všechna i. Ukažte, že počet stromů na daných vrcholech, kde stupeň každého v_i je d_i je roven

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\ldots(d_n-1)!}\,.$$

2. (6.30 – z minula zbývá zkorektnit intuici) Řekneme, že hrana se hodí k cyklu C pokud je součástí C nebo nemá s C společný ani vrchol. Uvažme nyní párování M (ne nutně perfektní) v hranově 2-souvislém grafu G. Ukažte, že existuje cyklus k němuž se hodí všechny hrany z M.

3. (9.19 – z minula zbývá jeden směr části (b) – zkuste nápovědu)

(a) Buď G graf K_4 s podrozdělenou jednou hranou. Je G indukovaný podgraf nějakého kriticky 4-barevného grafu?

(b) Graf G je podgraf (nebo indukovaný podgraf) nějakého kriticky $(k+1)$-barevného grafu právě tehdy, když pro každou hranu e platí $\chi(G/e_0) \leq k$.

4. (11.36) (Popis toho, jak fungují náhodné procházky po grafech – viz minule.)

Uvažme náhodnou procházku v nebipartitním souvislém grafu G, přičemž v_i označuje naši polohu v i-tém kroku. Ukažte, že jevy $v_i = x$ a $v_j = y$ jsou “skoro nezávislé”, pokud $j-i$ je velké. Přesněji: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje t_0 tak, že pro $j - i > t_0$ platí

$$|Pr[v_i = x,\ v_j = y] - Pr[v_i = x] \cdot Pr[v_j = y]| < \varepsilon\,.$$

5. (14.10) Rozhodněte, zda pro každé k existuje n přirozené tak, že kdykoli obarvíme body $\mathbb{R}^n$ pomocí k barev, tak v jedné barvě najdeme kopii (geometricky shodnou) R, přičemž R je (a) obdélník, (b) obecný rovnoběžník.

6. Buď $(d_i)_{i=1}^n$ skóre (tj. posloupnost stupňů) rovinného grafu G.

(a) Pomocí odhadu pro $\sum_i d_i$ ukažte, že je-li $\delta(G)$ (minimální stupeň v G) alespoň 4, tak

$$\sum_i d_i^2 < 2(n+3)^2 - 62\,.$$

(b) Ukažte indukcí podle $n \geq 4$, že

$$\sum_i d_i^2 \leq 2(n+3)^2 - 62\,.$$

Ukažte, že rovnost může platit pro každé $n \geq 4$.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`